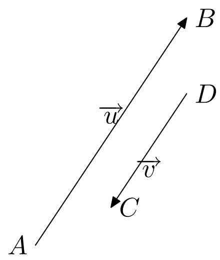
# Barycentre dans le plan

## 1 Rappels

### 1.1 Vecteurs et géométrie élémentaire

#### 1.1.1 Colinéarité de deux vecteurs

**Définition 1** *Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ sont* **colinéaires** *signifie qu'ils ont la même direction. Cela signifie que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles (donc éventuellement confondues).*
*Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$.*




**Théorème 1** *Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires équivaut à dire "Il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou il existe un réel $k'$ tel que $\overrightarrow{v} = k'\overrightarrow{u}$*

**Théorème 2** *Parallélisme et alignement*

- *Dire que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont* **parallèles** *équivaut à dire qu'il existe un réel $k$ non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$*
- *$A$ et $B$ sont deux points distintcs. Dire que les points $A, B, M$ sont alignés équivaut à dire qu'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. ($k = \frac{AM}{AB}$ si $M \in [AB)$ et $k = -\frac{AM}{AB}$ sinon)*

*Ainsi la droite $(AB)$ est l'ensemble de tous les points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc :*
*$M \in (AB)$ équivaut à "Il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$".*

#### 1.1.2 Vecteurs et droites

**Définition 2** *Un vecteur directeur d'un droite $d$ est un vecteur non nul dont la direction est celle de $d$.*

Remarques :

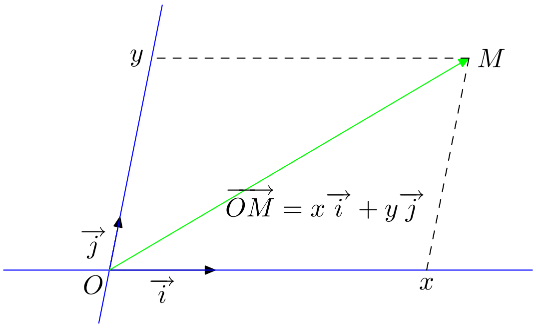
1. Si $A$ et $B$ sont deux points distincts et quelconques de $d$ alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $d$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $d$ alors $k\overrightarrow{u}$, avec $k$ réel non nul, est aussi un vecteur directeur de $d$.
3. Deux vecteurs directeurs d'une droite $d$ sont colinéaires.

### 1.2 Vecteurs et géométrie analytique

Dans cette section, un repère (cartésien) $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$du plan est fixé.

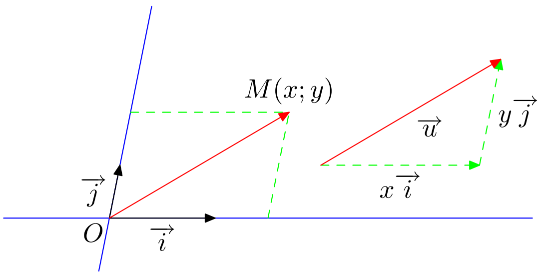
### 1.2.1 Lien entre coordonnées d'un point et vecteur

**Définition 3** *Dire que le point $M$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On note $M(x;y)$, $x$ est l'abscisse et $y$ l'ordonnée.*




### 1.2.2 Coordonnées de vecteurs

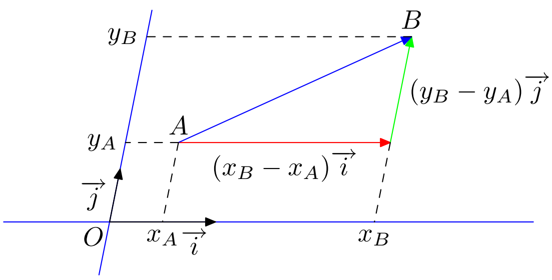
**Définition 4** *Dire que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$équivaut à dire que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ ou encore que le point $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}(x;y)$.*




**Théorème 3** *Égalité de deux vecteurs*
*Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont égaux signifie que leurs couples de coordonnées sont égaux : $x = x'$ et $y = y'$.*

**Théorème 4** *$\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont deux vecteurs quelconques et $k$ est un réel quelconque.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$*
- *Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$.*

**Théorème 5** *Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$*
*$A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points quelconques.*
*Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.*




### 1.2.3 Traduction analytique de la colinéarité

**Théorème 6** *Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires équivaut à dire que $xy' - x'y = 0$.*

Conséquences :

1. Si une droite $d$ a pour équation $y = mx + p$ alors $\overrightarrow{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de $d$.
2. Si le vecteur $\overrightarrow{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de $d$ alors $m$ est le coefficient directeur de $d$.

### 1.2.4 Norme d'un vecteur dans un repère orthonormal

Ici le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$est orthonormal.

**Théorème 7** *$\overrightarrow{u}(x;y)$ est un vecteur quelconque, alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.*
*$A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points quelconques, la distance $AB$ est donnée par $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$*

# 2 Barycentre de deux points

## 2.1 Approche

**Exercice 1**

Activité 1 page 236 du manuel.

## 2.2 Définition

**Définition 5** *Un couple du type $(A,\alpha)$, où $A$ est un point et $\alpha$ un réel quelconque, est appelé un point pondéré. On dit aussi que $A$ est affecté du coefficient ou du poids $\alpha$.*

**Propriété 1** *$A$ et $B$ sont deux points quelconques, $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$.*
*Il existe un unique point $G$ du plan tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

**Preuve**

---

**Définition 6** *$(A,\alpha)$ et $(B,\beta)$ sont deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. On appelle* **barycentre** *de $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ l'unique point $G$ tel que*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

**Remarques** :

- Ainsi, dire que $G$ est le **barycentre** de $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ signifie deux choses :

$$\alpha+\beta\neq 0 \text{ et } \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

- D'après la preuve précédente, le barycentre n'existe pas lorsque $\alpha+\beta\neq 0$ et $A\neq B$.

**Exercice 2**

1. Démontrez, lorsque $A\neq B$, que le barycentre de $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ est sur la droite $(AB)$.
2. Réciproquement, démontrez que tout point $M$ de la droite $(AB)$ est le barycentre de $(A,\alpha)$, $(B,\beta)$ avec $\alpha$ et $\beta$ convenablement choisis.
3. Résumez ce qui a été démontré en une seule phrase.

**Remarque** : Retenez surtout de l'exo précédent, que deux points pondérés et leur barycentre sont alignés...

### 2.3 Homogénéité du barycentre

**Propriété 2** *Si $G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$ alors $G$ est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$ lorsque $k$ est une constante réelle non nulle. Autrement dit, le barycentre est invariant si on change les coefficients par des coefficients proportionnels.*

**Preuve**

---

**Définition 7** *Lorsque les points $A$ et $B$ sont affectés du même coefficient $\alpha$, non nul, le barycentre de $G$ de $(A, \alpha)$, $(B, \alpha)$ est appelé* **l'isobarycentre** *de $A$ et $B$.*
*Il est donc, d'après ce qui précède, le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$ et c'est le seul point $G$ tel $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.*

**Exercice 3**

Prouvez, lorsque $A \neq B$, que l'isobarycentre de $A$ et $B$ n'est pas un point quelconque...

### 2.4 Réduction vectorielle

**Théorème 8** *$G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$.*
*Alors* **pour tout point M**, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

**Preuve**

---

## 3 Barycentre de trois points

Les définitions et résultats de la section précédente s'étendent sans difficulté au cas d'un système de trois points pondérés.

### 3.1 Extension des théorèmes et propriétés précédentes

**Théorème 9** *$A$, $B$, $C$ sont trois points et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.*
*Il existe un unique point $G$ du plan tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

*Ce point est appelé le* **barycentre** *des points pondérés $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$, $(C, \gamma)$.*

**Propriété 3** *$G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$, $(C, \gamma)$ alors $G$ est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$ et $(C, k\gamma)$où $k$ est une constante non nulle. Autrement dit le barycentre est invariant si on change les poids par des poids proportionnels.*

**Définition 8** *Lorsque les points $A$, $B$ et $C$ sont affectés du même coefficient $\alpha$, non nul, le barycentre $G$ de $(A, \alpha)$, $(B, \alpha)$, $(C, \gamma)$ est appelé* **l'isobarycentre** *de $A$, $B$ et $C$.*

D'après la propriété précédente l'isobarycentre de $A$, $B$ et $C$ est aussi l'isobarycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et c'est le seul point $G$ tel $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

**Exercice 4**

Prouvez, lorsque $ABC$ est un triangle que l'isobarycentre de $A, B, C$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

**Théorème 10** *Réduction vectorielle.*
*$G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$, $(C, \gamma)$.*
*Alors* **pour tout point M**, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

### 3.1.1 Règle d'associativité

**Théorème 11** *$G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$, $(C, \gamma)$.*
*Supposons que $\alpha + \beta \neq 0$ et notons $H$ le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$.*
*Alors $G$ est le barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ , $(C, \gamma)$.*

**Preuve**

**Remarque** :
Cette propriété est quelques fois appelée règle d'associativité, elle dit que dans la recherche du barycentre de trois points, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre $H$ (sous réserve d'existence), affecté de la somme non nulle de leurs coefficients.

## 4 Barycentre de $n$ points

On généralise (les preuves sont identiques), les résultats établis pour deux ou trois points.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont $n$ points et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n$ réels tels que $a_1 + a_2 + \ldots a_n \neq 0$.

- Il existe un unique point $G$ tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

  Le point $G$ est appelé le barycentre des $n$ points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$.
- Pour tout point $M$,

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\overrightarrow{MG}$$

- Pour tout réel $k$, non nul, les points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$, et les points $(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \ldots, (A_n, ka_n)$ ont le même barycentre. Autrement dit, on ne change pas la barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Dans le cas où $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \neq 0$, $G$ est appelé l'isobarycentre des $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Règle d'associativité :
  Pour trouver le barycentre $G$, de $n$ points, lorsque $n \geqslant 3$, on peut remplacer $p$ points, pris parmi les $n$ points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme non nulle de leurs coefficients.

## 4.1 Coordonnées du barycentre

**Théorème 12** *Dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$du plan, le barycentre de $n$ points pondérés a pour abscisse (resp. ordonnée) la moyenne pondérée, par les coefficients des points, des abscisses (resp. ordonnées) de ces points. Ainsi : (avec des notations évidentes)*

$$x_G = \frac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \ldots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

$$y_G = \frac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \ldots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$