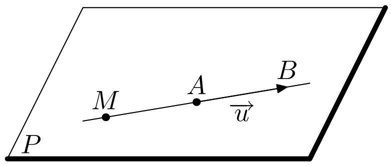
# Vecteurs et repérage cartésien de l'espace

## 1 Vecteurs de l'espace.

La notion de vecteur (sens, direction, longueur) vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace. Les notions suivantes aussi :

1. Pour tout point $O$ de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un point $A$ et un seul tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.
2. Égalité de deux vecteurs à l'aide de la définition (sens, direction, longueur) ou caractérisation à l'aide d'un parallélogramme.
3. Les règles de calculs (Relation de Chasles, règle du parallèlogramme, multiplication d'un vecteur par un réel)
4. La colinéarité de deux vecteurs et son application au parallélisme ou bien à l'alignement de trois points. En particulier, comme dans le plan on dispose du théorème suivant :

   **Théorème 1** *$A$ est un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.*
   *La droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$, où $k$ est un nombre réel.*

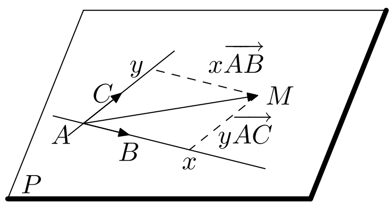
   
   

   **Remarque** :
   Cette droite est notée $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$, on dit qu'elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Souvent, dans ce cadre, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ où $A$ et $B$ sont deux points distincts ; alors $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$=(AB).

## 2 Vecteurs coplanaires

### 2.1 Caractérisation vectorielle d'un plan. Plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$

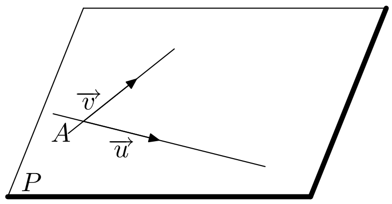
**Théorème 2** *$A$, $B$ et $C$ sont trois points non alignés.*
*Le plan $(ABC)$ est l'ensemble des points $M$ définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, $x$ et $y$ étant des réels quelconques. Autrement dit, dire qu'un point $M$ est dans le plan $(ABC)$ équivaut à dire qu'il existe un couple de réels $(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.*




**Preuve**

− $A, B, C$ étant non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $(ABC)$. Donc si $M$ appartient à ce plan il existe un couple de réels $(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
− Réciproquement, considérons $M$ un point de l'espace défini par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec $x$ et $y$ réels. Puisque $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $(ABC)$, il existe dans ce plan un point $N$ de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ et $M = N$ donc $M$ est bien dans le plan $(ABC)$.

**Théorème 3** *Un point $A$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires déterminent un plan et un seul, que l'on note $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, qui est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, avec $x$ et $y$ des nombres réels quelconques.*




**Remarques** :
- On dit que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ou bien que ce plan est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Il existe une infinité de couple de vecteurs directeurs pour un plan.

**Preuve**

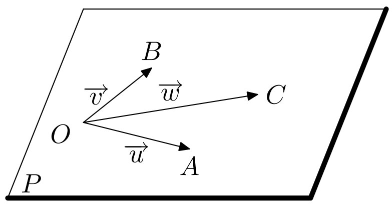
L'existence de ce plan est clairement établie par le théorème précédent. Il nous reste à prouver l'unicité : Soient $P$ et $Q$ deux plans contenant $A$ et dirigés par le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Si $M \in P$ alors il existe un couple de réels $(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ donc $M$ appartient aussi à $Q$. Il en résulte que $P$ est inclus dans $Q$. On démontre de même que $Q$ est inclus dans $P$ et donc que $P = Q$.

---

### 2.2 Vecteurs coplanaires.

**Définition 1** *On dit que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque, ayant choisi un point $O$ quelconque, ce point $O$ et les points $A, B, C$ définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont coplanaires (ie dans un même plan.)*




Remarque :
On définit de manière analogue la coplanarité de $n$ vecteurs ($n \geqslant 3$).
Si deux vecteurs parmi les trois sont colinéaires alors les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont nécessairement coplanaires.
En effet, supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : Si l'un ou l'autre est nul alors $A = O$ ou $B = O$ il y a donc sur les quatre points au maximum trois points distincts qui sont donc coplanaires. Sinon il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ donc $O, A, B$ sont alignés, alors les quatre points sont dans $(OAC)$.
En général il n'est pas "aisé" de démontrer que quatre points distincts sont coplanaires. Le théorème suivant illustre pour un tel problème toute l'efficacité du calcul vectoriel.

**Théorème 4** *$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Alors dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe des nombres réels $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.*

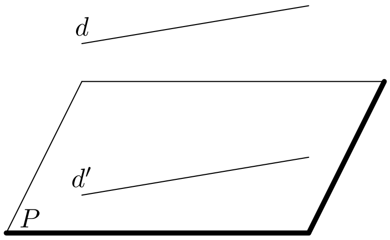
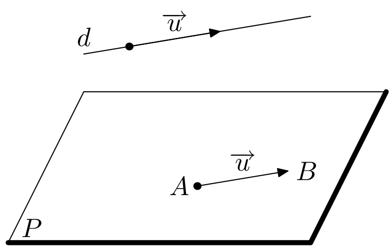
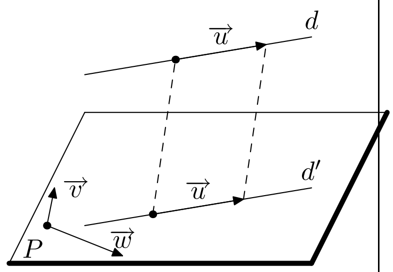
**Preuve**

Choisissons un point $O$ et considérons les points $A, B, C$ tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont des vecteurs directeurs du plan $(OAB)$. Par définition, "$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires" équivaut à "$C$ appartient au plan $(ABC)$". Or d'après le théorème 2, cette appartenance équivaut à "il existe des réels $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$" soit $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

---

## 2.3 Caractérisation vectorielle du parallélisme.

### 2.3.1 Parallélisme d'une droite et d'un plan.

<table>
<tr><th>Point de vue ponctuel</th><th>Point de vue vectoriel</th></tr>
<tr><td>Pour démontrer qu'une droite $d$ est parallèle au plan $P$, on peut démontrer que $d$ est parallèle à une droite $d'$ de $P$.<br>
</td><td>Pour démontrer qu'une droite $d$, dirigée par $\overrightarrow{u}$ est parallèle au plan $P$ :<br>
1. on peut démontrer que le plan $P$ contient deux points $A$ et $B$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.<br>
<br>
2. on peut démontrer, si le plan est dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.<br>
</td></tr>
</table>

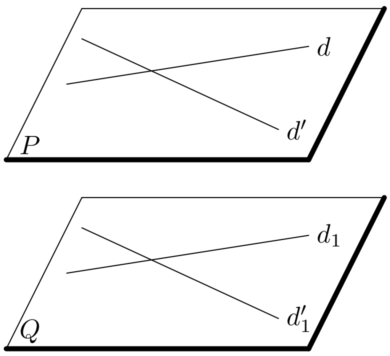
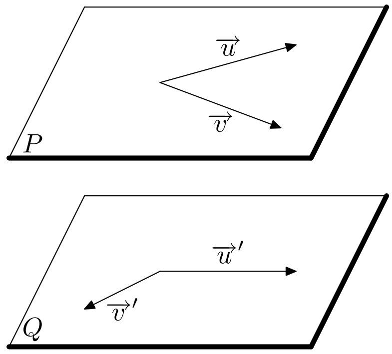
**Preuve**

Démontrons le 2

Soit $A \in d$, $B \in P$ et $d'$ la droite parallèle à $d$ passant par $B$. Soient $E, F, G, H$ tels que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{u}$.

- Si $d$ est parallèle à $P$ alors comme $d'$ est parallèle à $d$ elle parallèle à $P$. Comme $B$ est commun à $d'$ et $P$ alors $d'$ est incluse dans $P$ donc $G$ est dans $P$. Ainsi $B, E, F, G$ sont dans $P$ donc coplanaires. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
- Réciproquement, si ces vecteurs sont coplanaires alors les points $B, E, F, G$ sont coplanaires dans $P$. Comme $d' = (BG)$ alors $d'$ est incluse dans $P$ donc parallèle à $P$. Comme $d'$ est parallèle à $d$ alors $d$ est parallèle à $P$.

### 2.3.2 Parallélisme de deux plans

<table>
<tr><th>Point de vue ponctuel</th><th>Point de vue vectoriel</th></tr>
<tr><td>Pour démontrer que deux plans sont parallèles, on peut démontrer que deux droites sécantes de l'un, sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre<br><br></td><td>Pour démontrer que deux plans $P$, dirigé par le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et $Q$, dirigé par le couple $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$, sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}'$ d'une part, et les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ d'autre part, sont coplanaires.<br><br></td></tr>
</table>

**Preuve**

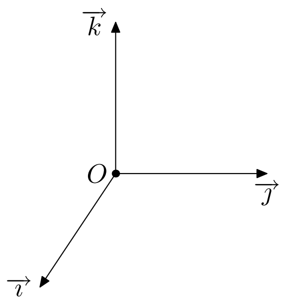
Soit $A \in P$ et $B \in Q$.

- Si $Q$ est parallèle à $P$ alors $D(B, \overrightarrow{v}')$ est parallèle à $P$ car elle est incluse dans $Q$. Alors d'après le théorème précédent $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ sont coplanaires.
  De la même façon on démontre que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}'$ sont coplanaires.
- Réciproquement, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ sont coplanaires alors $D(B, \overrightarrow{v}')$ est parallèle à $P$ et il en est de même pour $D(B, \overrightarrow{u}')$. Ainsi $Q$ contient deux droites sécantes parallèles à $P$ il est donc parallèle à $P$.

# 3 Repérage cartésien dans l'espace.

## 3.1 Repère de l'espace

Choisir un repère cartésien de l'espace, c'est se donner un point $O$ appelé origine du repère, et un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires (ce qui signifie, si on note $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, que les points $O, I, J, K$ ne sont pas coplanaires). On note $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ce repère. Le triplet de vecteurs est appelé base des vecteurs de l'espace.



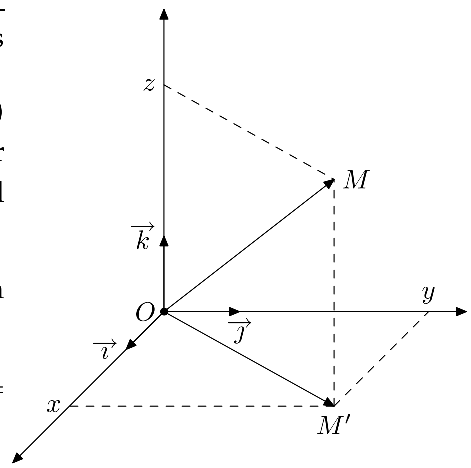

## 3.2 Coordonnées

### 3.2.1 Coordonnées d'un point

**Théorème 5** $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est un repère de l'espace.*
*Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.*

**Preuve**

Nous admettrons l'unicité d'une telle écriture, démontrons l'existence.
$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires donc le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et la droite $(M; \overrightarrow{k})$ ne sont pas parallèles. Notons $M'$ leur point d'intersection, $M'$ est dans le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donc il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel $z$ tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{k}$.
Alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.




Remarque :
$(x; y; z)$ sont les coordonnées du point $M$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. $x$ est l'abscisse, $y$ l'ordonnée, $z$ la cote du point $M$ dans ce repère.

### 3.2.2 Coordonnées d'un vecteur.

**Définition 2** *$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur et $M$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.*
*Par définition, les coordonnées $(x; y; z)$ de $M$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.*

Remarque :
Par abus de langage on dit aussi les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans le repère.

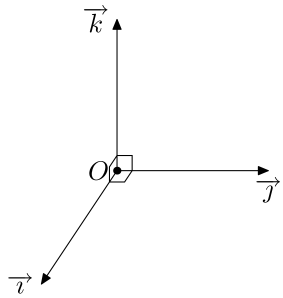
## 3.3 Calculs sur les coordonnées.

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée. (cf votre manuel page 304)

# 4 Repère orthonormal. Distance dans l'espace

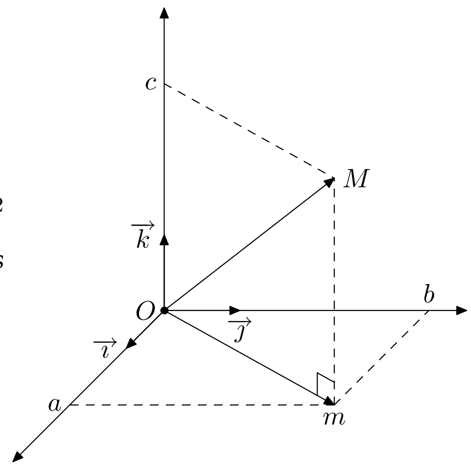
**Définition 3** *Comme dans le plan…*
*Dire que les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, signifie que leurs directions sont orthogonales.*
*Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.*

**Définition 4** *Dire que le repère* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est un repère orthonormal signifie que* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *sont deux à deux orthogonaux et de norme* 1.




**Théorème 6** *Dans un repère orthonormal*

1. *si* $\vec{u}$ *a pour coordonnées* $(a; b; c)$ *alors* $\|\vec{u}\|^2 = a^2+b^2+c^2$
2. *si* $M$ *et* $P$ *ont pour coordonnées* $(x; y; z)$ *et* $(x'; y'; z')$ *alors* $MP^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$.




**Preuve**

1. $M$ est le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors $\|\vec{u}\|^2 = OM^2$. Comme le repère est orthonormal $OMm$ est rectangle en $m$. Donc $OM^2 = Om^2 + mM^2$. Mais, en utilisant le plan $(xOy)$ muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$on obtient, $Om^2 = a^2 + b^2$, comme $mM^2 = c^2$ alors $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
2. On applique ce qui précéde au vecteur $\overrightarrow{MP}$.

# 5 Barycentre dans l'espace.

La définition du barycentre de points pondérés du plan s'étend immédiatement à des points de l'espace. Les définitions,démonstrations, vues dans le chapitre "barycentre dans le plan" sont toujours valables. Les définitions et résultats qui suivent sont valables tant en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace. Aussi dans cette section nous ne précisons pas si les points considérés sont dans un même plan ou non ; cette précision n'est nécessaire qu'au moment de l'emploi des coordonnées.

## 5.1 Existence et définition.

**Théorème 7** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont* $n$ *points (distincts ou non) et* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n$ *réels tels que* $a_1 + a_2 + \ldots a_n \neq 0$ *alors il existe un et un seul point* $G$ *tel que :*

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

**Définition 5** *Le point* $G$ *est appelé le barycentre des* $n$ *points pondérés* $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots (A_n, a_n)$.

Remarque :
Dans le cas où $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \neq 0$, $G$ est appelé l'isobarycentre des $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

En particulier si les points $A, B, C$ ne sont pas alignés, l'isobarycentre de $A, B, C$ est le centre de gravité de $ABC$ et celui de $A$ et $B$ est le milieu de $[AB]$.

**Théorème 8** *Si $A, B, C$ sont dans un plan $P$, alors leur barycentre est situé dans ce plan ie dans le plan $(ABC)$.*

**Preuve**

D'après le chapitre "barycentre dans le plan", $G$ le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$ donc d'après le théorème 2 il est dans le plan $(ABC)$.

## 5.2 Réduction vectorielle

Le but est de réduire l'écriture de $a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{MA_n}$. dans le cas où $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$

**Théorème 9** *$(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots (A_n, a_n)$ sont $n$ points pondérés.*
*Lorsque $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, pour tout point $M$,*

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\overrightarrow{MG}$$

**Propriété 1**
*Dans l'espace muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, en utilisant $M = O$ et en posant $\alpha = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ on obtient $a_1\overrightarrow{OA_1} + a_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{OA_n} = \alpha\overrightarrow{OG}$, ainsi par passage aux coordonnées,*

$$x_G = \frac{1}{\alpha}(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n); y_G = \frac{1}{\alpha}(a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n); z_G = \frac{1}{\alpha}(a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n)$$

## 5.3 Propriétés.

**Propriété 2** *Invariance du barycentre*
*Pour tout réel $k$, non nul, les points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots (A_n, a_n)$, et les points $(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \ldots (A_n, ka_n)$ ont le même barycentre. Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les poids par des poids proportionnels.*

**Propriété 3** *Associativité du barycentre*
*$G$ est la barycentre de $n$ points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots (A_n, a_n)$, $n \geqslant 3$.*
*Si $a_1+a_2+\ldots+a_p \neq 0$, avec $2 \leqslant p \leqslant n-1$, alors $G$ est aussi le barycentre de $(H, a_1+\ldots+a_p), (A_{p+1}, a_{p+1}), \ldots, (A_n, a_n)$ où $H$ est le barycentre des $p$ points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots (A_p, a_p)$*

Cette propriété est quelques fois appelée règle d'associativité, elle dit que dans la recherche du barycentre de $n$ points, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre $H$, affecté de la somme non nulle de leurs coefficients.