Corrigé du devoir surveillé n° 7

1. On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

d'où les distances

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \qquad BC = 15 \qquad AC = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Il est alors facile de vérifier Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui prouve que $\boxed{ABC \text{ rectangle en } A}$.

Une autre méthode, plus rapide, consiste à déterminer les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, pour vérifier ensuite que le produit de ces coefficients fait bien -1, prouvant ainsi l'orthogonalité des droites considérées.

2. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. En posant D de coordonnées inconnues (x_D, y_D), la relation précédente nous donne le système :

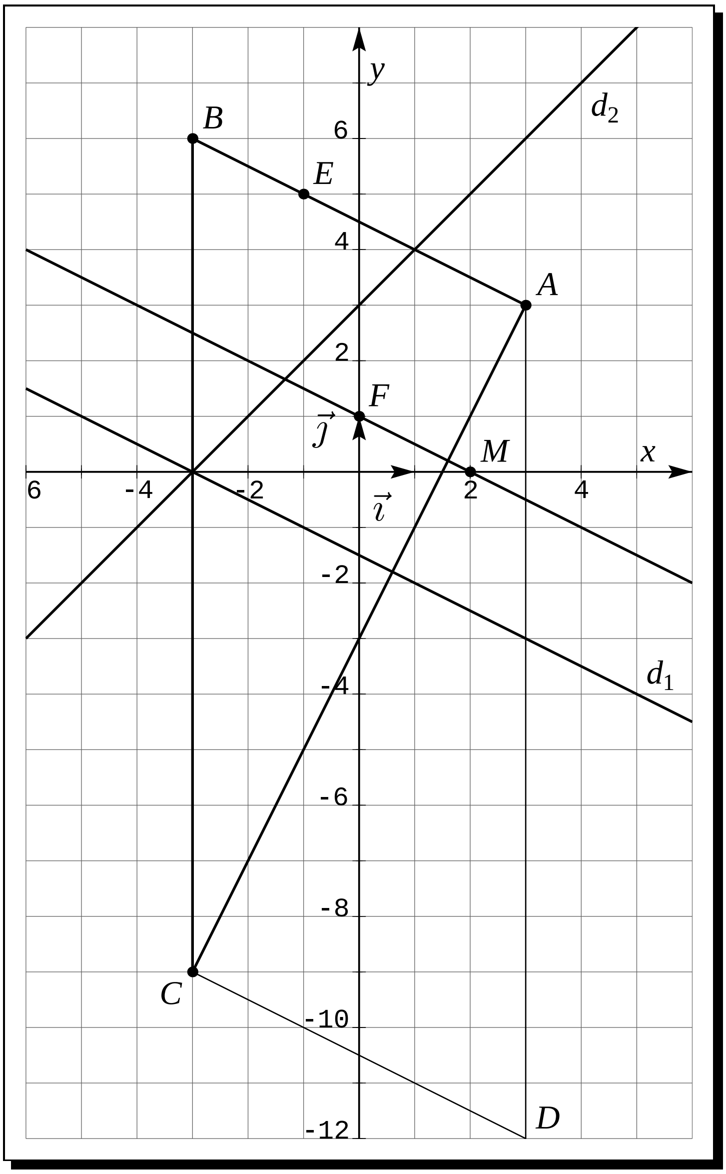
$$\begin{pmatrix} x_d - 3 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -15 + 3 = -12 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{D(3; -12)}$$

3. Les points A, B et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA}$ sont colinéaires. Or

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La relation de colinéarité donne alors $-6 \times (-2) - 3 \times 4 = 0$, ce qui prouve que ces vecteurs sont colinéaires, et donc que $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } E \text{ sont alignés}}$.

4. *a*)



Nous connaissons le coeeficient directeur de la droite Δ, ce qui nous permet d'affirmer que son équation réduite est de la forme

$$\Delta\ : y = -\frac{1}{2}x + b$$

où b est une constante réelle à déterminer. Sachant que le point F appartient à Δ, on en déduit que les coordonnées de F vérifient cette équation et que l'on a la relation

$$1 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \qquad \text{d'où} \qquad b = 1.$$

L'équation réduite de Δ est donc finalement $\boxed{\Delta\ : y = -\frac{1}{2}x + 1}$.

b) Procédons de la même manière que précédemment. Sachant que

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

on en déduit que le coefficient directeur de (AC) est $-12/-6 = 2$. Reste à utiliser le fait que les coordonnées de Avérifient l'équation de la droite (AC) pour trouver l'ordonnée à l'origine. Tous calculs faits, on trouve l'équation réduite $\boxed{(AC\ : y = 2x - 3)}$.

5. a) L'équation réduite de la droite d_1 est

$$d_1\ : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Les points $(1; -2)$ et $(-1; 1)$, par exemple, sont sur cette droite.

b) On vérifie facilement que les coordonnées de G vérifient les équations des droites d_1 et d_2. Ainsi, on a bien

$$-3 + 3 + 2 \times 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = -3 + 3.$$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{le point } G \text{ appartient à } d_1 \text{ et à } d_2}$.

6. Soit $M(x, y)$ le point inconnu. On a

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FE} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 - x \\ 3 - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - x \\ 1 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 - 2x \\ 4 - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} 3 - 2x = -1 \\ 4 - 2y = 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (2, 0)
\end{aligned}$$

d'où les coordonnées cherchées $\boxed{M(2, 0)}$.

7. a) Connaissant l'équation de la droite d_1, il suffit de trouver y lorque $x = 1$. D'où le point cherché : $\boxed{(1, -2)}$

b) Même raisonnement avec d_2 : que vaut x si $y = 2$. On trouve $\boxed{(-1; 2)}$.