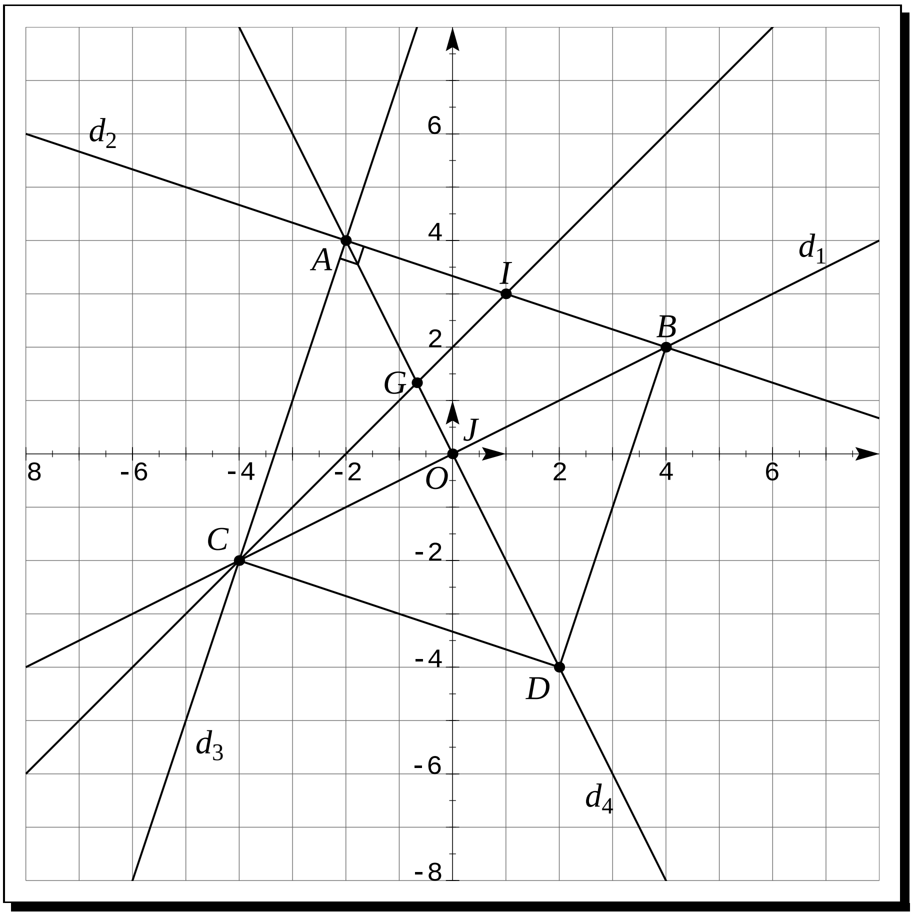
Corrigé du devoir surveillé n° 8

A **1.**



2. En utilisant les formules du cours, il vient

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\2-4\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}} \quad \text{puis, de la même façon} \quad \boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}}$$

3. En utilisant les calculs précédents, on trouve

$$AB = \sqrt{6^2+(-2)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}}$$

puis, de la même façon

$$\boxed{AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \boxed{AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}}$$

4. Au vu des calculs précédents, on peut donc affirmer que $\boxed{ABC \text{ est isocèle rectangle en } A}$.

5. Son aire est donnée par le calcul

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A}(ABC) = 20\,\text{cm}^2}$$

puisque l'unité d'aire est de 1 cm^2.

B **1.** *a*) L'équation réduite de la droite (d_1) est $(d_1)\ : y = \frac{1}{2}x$, d'où le $\boxed{\text{coefficient directeur de } (d_1) : \frac{1}{2}}$.

b) Un vecteur directeur de (d_1) est donc $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\vec{u}$ en est un autre.

2. *a*) Le $\boxed{\text{coefficient directeur de } (d_2) \text{ est } -\frac{1}{3}}$.

c) Les droite (d_1) et (d_2) n'ont ps le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes, et on peut affirmer qu' $\boxed{\text{elles ont un point en commun}}$. En regardant le dessin, on a l'impression que le point B est ce point commun. Il ne reste plus qu'à vérifier que les coordonnées de B vérifient les équations de (d_1) et de (d_2) pour prouver que $\boxed{(d_1) \cap (d_2) = \{B\}}$.

3. *a*) Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AC) si et seulement si

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} &\iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\iff -6(x+2) + 2(y-4) = 0 \\ &\iff -6x - 12 + 2y - 8 = 0 \end{aligned}$$

d'où une équation cartésienne de (AC) : $\boxed{(d_3)\ : -6x + 2y - 20 = 0}$.

b) L'équation réduite de (AC) est donc $\boxed{y = 3x + 10}$.

c) Le coefficient directeur de (d_3) est 3 et le coeeficient directeur de (d_2) est $-1/3$. Le produit de ces coefficients directeurs est égal à -1, ce qui prouve que les droites $\boxed{(d_2) \text{ et } (d_3) \text{ sont perpendiculaires}}$.

d) Les points A et C sont sur (d_3) par définition de (d_3), et on a vu dans la question **B-2.***c*) que le point B était sur la droite (d_2). Reste à vérifier que le point A est bien sur la droite (d_2) pour retrouver le fait que $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A}$.

$\boxed{\textbf{C}}$ **1.** La droite (d_4) d'équation $y = mx + p$ passe par les points $O(0, 0)$ et $A(-2, 4)$, d'où le système d'équation

$$\begin{cases} 0 = m \times 0 + p \\ 4 = m \times (-2) + p \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = p \\ -2 = m \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{(d_4)\ : y = -2x}.$$

2. Le coefficient directeur de (d_4) est -2 alors que celui de (d_1) est $1/2$ (d'après **A-1.***a*)). Le produit de ces coefficients directeurs est égal à -1, ce qui prouve que $\boxed{(d_1) \text{ et } (d_4) \text{ sont perpendiculaires}}$.

3. Les coordonnées $(2; -4)$ de D vérifient l'équation $y = -2x$ de (d_4), donc $\boxed{D \text{ appartient à } (d_4)}$.

4. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2+4 \\ -4+2 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \quad \text{d'après } \textbf{A-1.}$$

donc $ABDC$ est un parallélogramme, or il possède un angle droit en A (d'après **A-4.**), donc $\boxed{ABDC \text{ est un carré}}$.

Son aire est donnée par le calcul $\mathcal{A}(ABDC) = AB \times AC$ soit $\boxed{\mathcal{A}(ABDC) = 40\,\text{cm}^2}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ **1.** Il vient

$$I\left(\frac{1}{2}(-2+4); \frac{1}{2}(4+2)\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{I(1;3)} \quad \text{et, de la même façon} \quad \boxed{J(0;0)}$$

2. Comme les points J et O sont confondus, on a déjà $\boxed{\text{(AJ) : y = -2x}}$ puisque (AJ) et (d_4) sont confondues.

Pour (CI), on peut utiliser le fait que le point $M(x, y)$ est sur (CI) si et seulement si

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{CI} \text{ colinéaires} &\iff \begin{pmatrix} x+4 \\ y+2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\iff 5(x+4) - 5(y+2) = 0 \\ &\iff 5x + 20 - 5y - 10 = 0 \end{aligned}$$

d'où une équation cartésienne de (CI) : $\boxed{(CI)\ : x - y + 2 = 0}$.

3. Les droite (AJ) et (CI) sont des médianes du triangle ABC. Le centre de gravité du triangle ABC est situé à l'intersection de ces médianes. Chercher les coordonnées de G revient donc à résoudre le système

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ x + 2 = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4/3 \\ x = -2/3 \end{cases}$$

d'où les coordonnées du point cherché : $\boxed{G\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)}$.