Corrigé du devoir surveillé n° 10

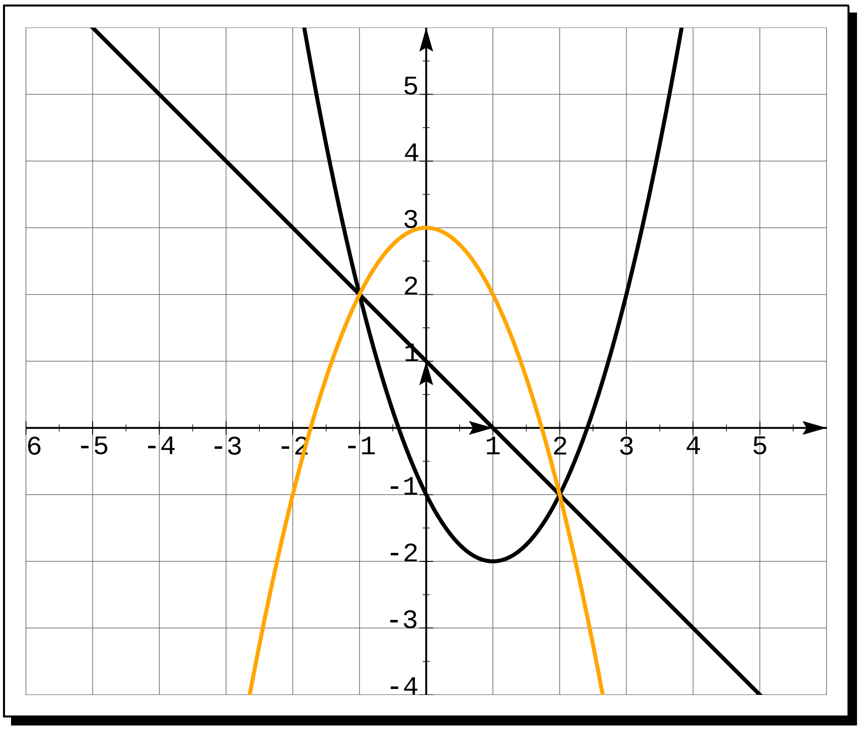
Exercice : Intersections de courbes, positions relatives

A **1.** *a*) Graphiquement, l'équation $f(x) = 0$ admet $\boxed{\text{2 solutions : } x \approx -0,4 \text{ et } x \approx 2,4}$.

b) Toujours graphiquement, on a $f(x) \leqslant 2$ si et seulement si $\boxed{x \in [-1;3]}$.

c) Pour finir, on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$ si et seulement si $\boxed{x \in [-1;0] \cup [2;3]}$.

2. *a*)



b) Les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 1 - x$ correspondent aux abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g. On en déduit qu'il y a $\boxed{\text{2 solutions : } -1 \text{ et } 2}$.

c) De la même façon, les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 \leqslant 1 - x$ correspondent aux abscisses des points de la courbe de f qui sont en-dessous de la courbe de g. On en déduit $\boxed{\text{l'intervalle solution : } [-1;2]}$.

3. Le tableau de variation lu sur le graphique est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

B **1.** Il vient

$$f(x) = -1 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0.$$

On a un produit de facteurs égal à zéro, ce qui permet d'en déduitr les $\boxed{\text{2 solutions : 0 et 2}}$.

2. Il vient

$$f(x) \geqslant -1 \iff x^2 - 2x \geqslant 0 \iff x(x-2) \geqslant 0.$$

Le tableau de signes s'impose, et il vient

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où la solution : $f(x) \geqslant -1$ si et seulement si $\boxed{x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[}$.

3. *a*) On vérifie facilement, en développant l'expression proposée, que $\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 2}$.

b) On remarque alors que $2 = \sqrt{2}^2$, et il vient

$$f(x) = (x-1)^2 - 2 = (x-1)^2 - (\sqrt{2})^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}.$$

L'expression $f(x)$ étant maintenant factorisée, on en déduit facilement qu'elle est nulle si et seulement si $\boxed{x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{C}}$ **1.** $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est paire}}$ puisque

$$h(-x) = 3 - (-x)^2 = 3 - x^2 = h(x).$$

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe } C_h \text{ est symétrique par rapport à l'axe } Oy}$.

2. *a*) Soit a et b deux nombres positifs rangés par ordre croissant. On a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a \leqslant b \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^2 \leqslant b^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \geqslant -a^2 \geqslant -b^2 \\ &\Longrightarrow \quad 3 \geqslant 3 - a^2 \geqslant 3 - b^2 \quad \Longrightarrow \quad 3 \geqslant h(a) \geqslant h(b) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est décroissante sur } 0; +\infty}$.

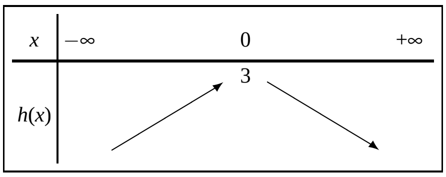
b) On remarque tout d'abord que $\boxed{h(0) = 3}$ donc le nombre 3 est atteint par la fonction h. Reste à montrer que l'on a $h(x) \leqslant 3$ pour tout x. Or

$$h(x) \leqslant 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - x^2 \leqslant 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2 \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \geqslant 0$$

et cette dernière égalité est vraie pour tout x réel puisque le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. On a donc $\boxed{h(x) \leqslant 3 \text{ pour tout } x}$.

Les deux points précédents prouvent que $\boxed{3 \text{ est le maximum de la fonction } h \text{ sur } \mathbb{R}}$.

c) On sait d'après **2.***a*) que la fonction h est décroissante sur $[0; +\infty[$, et on sait d'après **1.** que sa courbe représentative admet une symétrie par rapport à l'axe Oy. On en déduit alors le tableau de variation suivant :



3. À la calculatrice, on trouve

x	-3	-2	$-3/2$	-1	0	1	$3/2$	2	3
$h(x)$	-6	-1	$0,75$	2	3	2	$0,75$	-1	-6

5. *a*) On trouve $\boxed{2(x+1)(x-2) = 2x^2 - 2x - 4}$.

b) Chercher les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_h revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 = x^2 - 2x - 1 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x^2 - 2x - 4 \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 2(x+1)(x-2) \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

D'où les $\boxed{\text{2 points d'intersection : } (x, y) = (-1; 2) \text{ et } (x, y) = (2; -1)}$.