

# Devoir surveillé n° 2

durée : 1h

## Exercice 1 : (3 points) Étude d'une fonction exponentielle

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x - 1)e^{-x}.$$

Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (autrement dit : dérivée, signe de la dérivée, tableau de variation). L'étude des limites n'est pas demandée.

## Exercice 2 : (3 points) Équation trigonométrique

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$2 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$$

2. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Préciser les solutions appartenant à l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

## Exercice 3 : (14 points) Étude d'une fonction exponentielle

### – Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire –

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1.$$

1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g'(x)$  et  $(3 - x^2)$  ont le même signe.

2. En déduire le tableau de variation de  $g$ .

3. a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que  $g(0) = 0$ . On note  $\alpha$  la solution non nulle.

b) Prouver que

$$-2,4 < \alpha < -2,3.$$

4. Déduire des questions précédentes le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### – Partie B – Étude de la fonction $f$ –

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a) Montrer que, pour tout  $x$  réel, on a

$$f'(x) = g(x).$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  (l'étude des limites n'est pas demandée).

2. Déterminer une équation de  $T$ , la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0.

3. On note  $D$  la droite d'équation  $y = x$ .

a) Montrer que la droite  $D$  et la courbe  $C_f$  se coupent en deux points  $A$  et  $B$  dont on donnera les coordonnées.

b) Étudier les positions relatives de la droite  $D$  et de la courbe  $C_f$ .

4. Construire les droites  $T$  et  $D$  ainsi que la courbe  $C_f$ .