Devoir surveillé nº 3

durée : 1h

Exercice 1 : (*5 points*) **Étude d'une fonction exponentielle**

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)e^x.$$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f. Récapituler les résultats dans un tableau.

Exercice 2 : (*5 points*) **Étude d'une fonction exponentielle**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3e^{2x} + 3e^x - 7.$$

1. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f. Récapituler les résultats dans un tableau.

Exercice 3 : (*7 points*) **Étude d'une fonction rationnelle**

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. *a*) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}.$$

b) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe C_f.

3. On considère la droite Δ d'équation $y = x$.

a) Montrer que Δ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

b) Déterminer les coordonnées de K, le point d'intersection de la droite Δ avec la courbe C_f.

4. *a*) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

c) Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.

5. Représenter les droites T et Δ ainsi que la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 4 : (*3 points*) **Recherche d'asymptote**

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -2$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6 + 2e^{-x}}{2 + x}.$$

1. Déterminer les 3 constantes réelles a, b et c telles que l'on ait, pour tout $x \neq -2$:

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^{-x}}{2 + x}.$$

2. En déduire que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.