Un problème avec l'exponentielle

Exercice 1 : Un problème avec de l'exponentielle, *bac stl cl, 2001*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + x + 2$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormalo $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

1. *a*) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D.

2. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = e^{x}\left(e^{x} - 3 + \frac{x}{e^{x}} + \frac{2}{e^{x}}\right).$$

En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. *a*) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que $f'(x) = (2e^{x} - 1)(e^{x} - 1)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ puis déterminer le signe de $f'(x)$.

c) Dreseer le tableau de variations de f.

4. *a*) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $\ln(2/3)$.

Que peut-on dire des droites T et D ?

b) Tracer, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les droites D, T et la courbe $\mathcal{C}$.

5. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.

---

1. *a*) Il vient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty} \qquad \text{puisque} \qquad f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + x + 2 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} -3e^{x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty \end{cases}$$

b) On a

$$f(x) - (x + 2) = e^{2x} - 3e^{x} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x + 2) = 0$$

d'après **1.***a*). Ce qui prouve que la droite $\boxed{y = x + 2 \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } -\infty}$.

c) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de D revient à étudier le signe de la différence $f(x) - (x + 2)$. Il vient alors

$$f(x) - (x + 2) = e^{2x} - 3e^{x} = e^{x}\left(e^{x} - 3\right)$$
$$\text{or} \qquad e^{x} - 3 \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln 3$$

d'où le tableau de signes et la conclusion :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
e^{x}	$+$		$+$
$e^{x} - 3$	$-$	0	$+$
$f(x) - (x + 2)$	$-$	0	$+$
positions relatives	$\mathcal{C}$ au dessous de D		$\mathcal{C}$ au dessus de D

2. En développant l'expression proposée, il vient

$$e^{x}\left(e^{x} - 3 + \frac{x}{e^{x}} + \frac{2}{e^{x}}\right) = e^{x+x} - 3e^{x} + \frac{xe^{x}}{e^{x}} + \frac{2e^{x}}{e^{x}}e^{2x} - 3e^{x} + x + 2.$$

On a donc bien

$$\boxed{f(x) = e^x\left(e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)} \qquad \text{d'où l'on déduit} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x - 3 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{(formulaire)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3. a) En partant de l'écriture $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2$, on a immédiatement $\boxed{f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1}$.

b) c) Et en développant l'expression proposée, il vient

$$(2e^x - 1)(e^x - 1) = 2e^{2x} - e^x - 2e^x + 1 = 2e^{2x} - 3e^x + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 1)}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} 2e^x - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ \text{et} \qquad e^x - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

on a le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{4} - \ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

où

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= e^{-2\ln 2} - 3e^{-\ln 2} - \ln 2 + 2 \\ &= e^{\ln 2^{-2}} - 3e^{\ln 2^{-1}} - \ln 2 + 2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \ln 2 + 2 = \frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0,057 \end{aligned}$$

4. a) On a

$$\begin{aligned} f\big(\ln(3/2)\big) &= e^{2\ln(3/2)} - 3e^{\ln(3/2)} + \ln(3/2) + 2 \\ &= e^{\ln(9/4)} - 3 \times \frac{3}{2} + \ln(3/2) + 2 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \ln(3/2) + 2 \\ &= -\frac{1}{4} + \ln(3/2) \approx 0,15 \end{aligned}$$

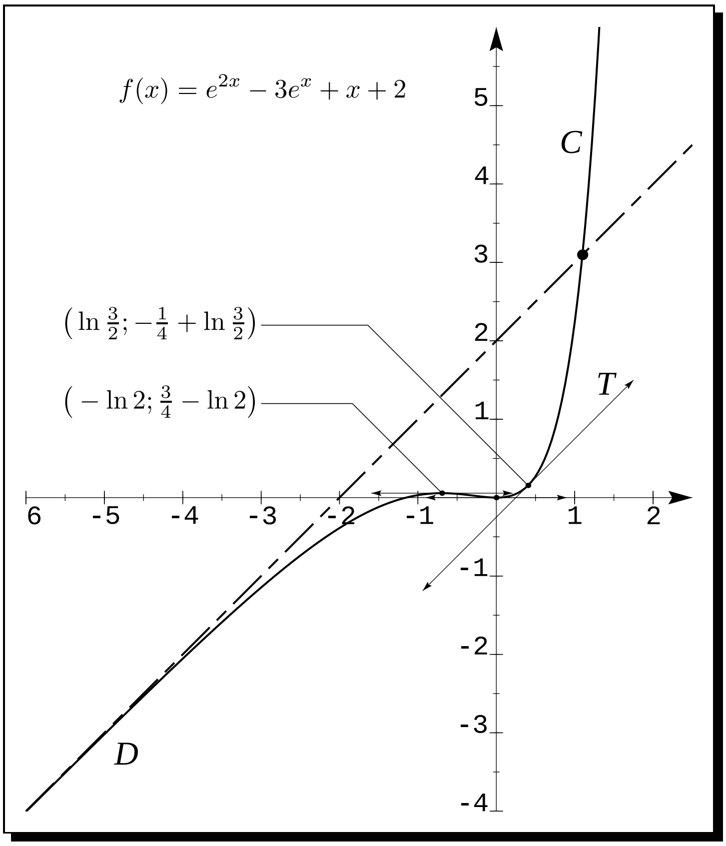
$$\begin{aligned} f'\big(\ln(3/2)\big) &= 2e^{2\ln(3/2)} - 3e^{\ln(3/2)} + 1 \\ &= 2e^{\ln(9/4)} - 3 \times \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où l'équation de la tangente :

$$T \ : y = \left(x - \ln\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4} + \ln\frac{3}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T \ : y = x + \frac{1}{4}}$$

Le coefficient directeur de la droite T est $f'(\ln(3/2)) = 1$, autrement dit les droites T et D ont le même coefficient directeur, ce qui permet d'affirmer que $\boxed{T \text{ et } D \text{ sont parallèles}}$.

b)



5. Comme C est au-dessous de D sur l'intervalle $[0; \ln 3]$ considéré, et comme l'unité d'aire est de $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$, l'aire cherchée est

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 16 \times \int_0^{\ln 3} (x+2) - f(x)\,dx \\
&= 16 \times \int_0^{\ln 3} -e^{2x} + 3e^x\,dx \\
&= 16 \times \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 3e^x\right]_0^{\ln 3} \\
&= 16 \times \left(\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln 3} + 3e^{\ln 3}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 3\right)\right) \\
&= 16 \times \left(\left(-\frac{9}{2} + 9\right) - \frac{5}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{A} = 32\text{ cm}^2}
\end{aligned}$$