Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 1 : Une équation différentielle d'ordre 1

On considère les équations différentielles

$$(E_1) : y' - 2y = 0 \qquad \text{et} \qquad (E_2) : y' = y.$$

1. *a*) Résoudre les équations différentielles (E_1) et (E_2).
   b) Déterminer la solution particulière f_1 de (E_1) telle que $f_1'(0) = 4$
   Déterminer la solution particulière f_2 de (E_2) telle que $f_2(0) = 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{2x} - e^x$.
   a) Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour étudier la limite de g en $+\infty$, on pourra écrire, pour tout nombre réel x, $g(x) = e^x(2e^x - 1)$.
   b) Déduire de la question précédente l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.
   c) Déterminer la dérivée g' de g.
   d) Étudier le signe de g'. En déduire le tableau des variations de g.
3. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes du repère.
4. Construire la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
5. Déterminer, en unités d'aire, l'aire comprise entre la courbe de g, l'axe Ox et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2 : Désintégration d'un corps radioactif

Un corps est dit *radioactif* lorsqu'il se désintègre spontanément en transformant une partie de ses noyaux en rayonnement.

Si t désigne le temps exprimé en jours, et $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs restant à l'instant t, on montre en physique que la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

où λ est un nombre réel strictement positif appelé *constante radioactive* du corps.

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Soit N_0 le nombres d'atomes radioactifs à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression de $N(t)$.
   c) Étudier les variations et les limites de la fonction N. Donner l'allure de sa courbe représentative.
2. *a*) On appelle *période* ou *demi-vie* de ce corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié. Montrer que T vérifie

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

   b) Calculer la constante radioactive de l'iode 131 sachant que sa période est de $8,06$ jours.
   c) Déterminer, en années, la période de l'uranium appauvri (U 238) sachant que sa constante radioactive est $\lambda \approx 4,22.10^{-13}$.
3. *a*) On dispose d'un kilogramme de plutonium (Pu). En admettant que le nombre d'atomes présents est proportionnel à la masse (il y a deux fois plus d'atomes dans 2 kg que dans 1 kg), et sachant que la demi-vie du plutonium est d'environ 25 000 ans, déterminer le temps nécessaire avant qu'il ne nous reste plus qu'un seul gramme de notre kilo de départ.
   b) Plus généralement, combien faut-il de périodes d'un élément radioactif considéré pour qu'il perde $99,9\%$ de sa masse ? Appliquer le résultat à l'iode 131.