Suites numériques

Exercice 1 : Suite : une application directe du cours

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$u_0 = -5 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Préciser, en les justifiant, la nature et les caractéristiques de cette suite.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Représenter graphiquement la suite (u_n).

5. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{117}$. (Valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.)

Exercice 2 : Suite : une application directe du cours

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$v_0 = 8 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$$

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

2. Préciser, en les justifiant, la nature et les caractéristiques de cette suite.

3. Exprimer v_n en fonction de n.

4. Représenter graphiquement la suite (v_n).

5. Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{103}$. (Valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.)

Exercice 3 : Modélisation de l'évolution de la population mondiale

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990. Pour cela, on donne le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5
Année	1950	1960	1970	1980	1990
Population p_n (en milliards d'hab)	2,5	3,0	3,6	4,4	5,2

1. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_1 = 2,5$ et $u_5 = 5,2$.

a) Calculer sa raison.

b) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

c) On veut représenter l'évolution de la population mondiale par cette suite arithmétique. L'indice n représente la dizaine d'années, comme pour le tableau ci-dessus, et u_n est exprimé en milliards d'habitants.

Déterminer la valeur de u_n pour l'an 2000.

2. Exprimer en pourcentage l'augmentation de la population entre 1950 et 1960; 1960 et 1970; 1970 et 1980; 1980 et 1990.

3. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_1 = 2,5$ et de raison $q = 1,2$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

b) On veut représenter l'évolution de la population mondiale par cette suite géométrique.

Avec les mêmes conventions qu'au **1.**, déterminer la valeur de v_n pour l'an 2000.

Exercice 4 : Intensité d'un rayon lumineux

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1. Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre, et I_1 son intensité à sa sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0.

2. On superpose n plaques de verre identiques. On note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la $n^{\text{ième}}$ plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

b) Quelle est la nature de la suite (I_n) ? Préciser le premier terme et la raison.

c) En déduire l'expression de I_n en fonction de I_0.

3. Déterminer le nombre minimal de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

Exercice 5 : Désintégration du radon

La désintégration de l'atome de radium donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, qui elle-même se désintègre avec le temps selon la formule

$$m(t) - m(t+1) = 0,165m(t)$$

où $m(t)$ désigne la masse du gaz à la fin du $t^{\text{ième}}$ jour.

1. Calculer $m(t+1)$ en fonction de $m(t)$.

2. Calculer $m(t)$ en fonction de t et $m(0)$.

3. Que peut-on dire de la suite des nombres

$$m(0), \quad m(1), \quad m(2), \quad m(3), \quad \ldots, \quad m(n), \quad \ldots$$

4. Au cours de quelle journée la masse d'un échantillon de radon atteindra-t-elle la moitié de sa valeur initiale ?

5. Au cours de quelle journée la masse d'un échantillon de radon atteindra-t-elle le quart de sa valeur initiale ?

Exercice 6 : Un exercice de synthèse (*bac STI, Génie Mécanique, 1995*)

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n - 1$.

a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.

b) Calculer, en fonction de n, la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n.$$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = e^{u_n}$.

a) Monter que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison q.

b) Calculer le produit

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots v_n.$$