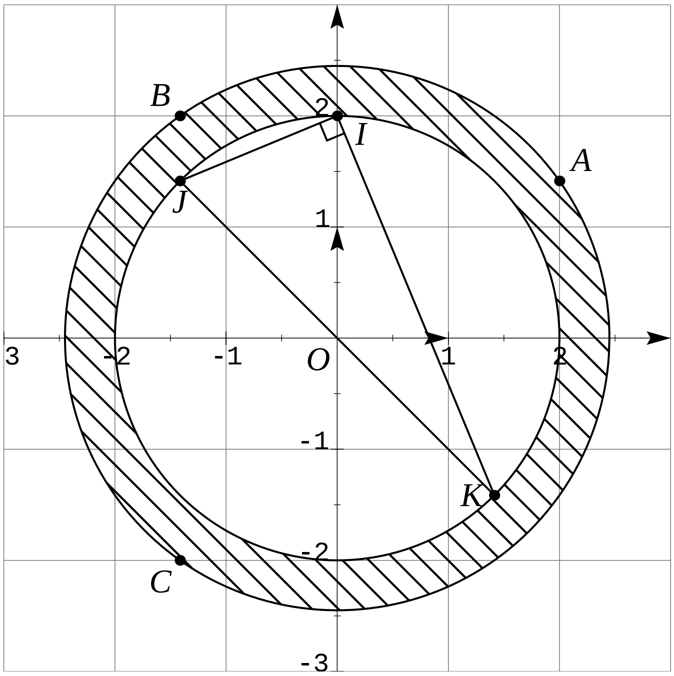
Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice : Équation du second degré, géométrie. *bac sti gm, 2000*

1. *a*) On trouve $\Delta = -16$, d'où les deux racines complexes conjuguées

$$z_B = \frac{-2\sqrt{2}+4i}{2} = \boxed{-\sqrt{2}+2i = z_B} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_C = -\sqrt{2}-2i}.$$

b)



2. On a $|z_A| = \sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$, soit $|z_A| = \sqrt{6}$ et $|z_B| = \sqrt{6}$, donc $\boxed{OA = OB = \sqrt{6}}$, ce qui prouve que les points $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ de rayon } \sqrt{6}}$.

3. *a*) On a

$$z_J = 2e^{3i\pi/4} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{z_J = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}}.$$

c) Calculons les longueurs des côtés du triangle IJK. Il vient

$$IJ = |z_J - z_I| = |-\sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2)| = \sqrt{8-4\sqrt{2}} \qquad JK = |z_K - z_J| = |2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}| = \sqrt{16}$$

$$\text{et} \qquad IK = |\sqrt{2} + i(-\sqrt{2}-2)| = \sqrt{8+4\sqrt{2}}.$$

On a alors évidemment $IJ^2 + IK^2 = JK^2$, et le théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle $\boxed{IJK \text{ est rectangle en } I}$.

d) On a

$$|z_I| = |2i| = 2, \qquad |z_J| = |-\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2 \qquad |z_K| = |\sqrt{2}-i\sqrt{2}| = 2$$

d'où l'on déduit que les points I, J et K sont tous situés sur le même cercle de centre O et $\boxed{\text{de rayon } 2}$. Ce cercle est donc le cercle circonscrit au triangle IJK.

4. *b*) L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$2 < |z| < \sqrt{6}$$

est l'ensemble des points M tels que la distance OM vérifie la relation

$$2 < OM < \sqrt{6}.$$

On en déduit que cet ensemble est $\boxed{\text{la couronne circulaire comprise entre } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}'}$