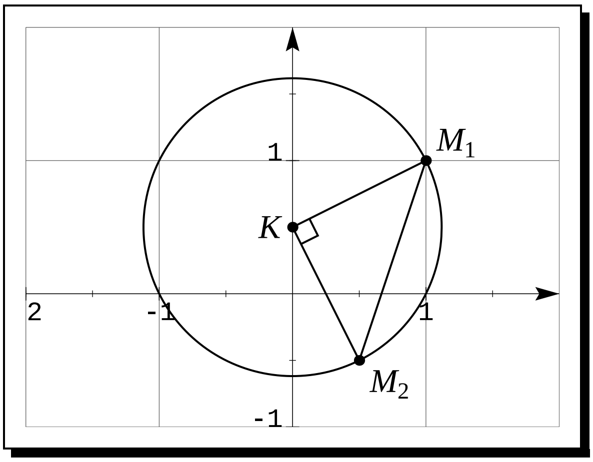
Corrigé du devoir surveillé nº 7 (bac blanc)

Exercice 1 : Géométrie, équation du second degré

1.



2. Il vient

$$\boxed{|z_1| = \sqrt{2}} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \cos\theta_1 = 1/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 \\ \sin\theta_1 = 1/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 \end{cases} \implies \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{convient}}$$

et, de la même façon

$$\boxed{|z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \cos\theta_2 = (\sqrt{2})/2 \\ \sin\theta_2 = -(\sqrt{2})/2 \end{cases} \implies \boxed{\theta_2 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{convient}}$$

3. Calculons les distances M_1K et M_2K. Il vient

$$M_1K = |z_3 - z_1| = \left|\frac{i}{2} - 1 - i\right| = \left|-1 - \frac{1}{2}i\right| \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M_1K = \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$\text{et} \qquad M_2K = |z_3 - z_2| = \left|\frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\right| \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M_2K = \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

ce qui prouve que $\boxed{M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont sur un même cercle de centre } K \text{ et de rayon } (\sqrt{5})/2}$.

4. Comme

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| \qquad \text{il vient} \qquad \boxed{M_1M_2 = \sqrt{\frac{10}{4}}}$$

et la relation de Pythagore nous prouve que $\boxed{M_1KM_2 \text{ rectangle en } K}$.

5. Pour résoudre l'équation proposée, on utilise la méthode du discriminant. Il vient $\boxed{\Delta = -1/4}$, d'où les deux racines complexes conjuguées :

$$z_A = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{z_A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_B = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i}.$$

Et on vérifie ensuite que

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{i}{2+2i} = \frac{i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2i+2}{8} = \frac{i+1}{4} = z_B,$$

ce qui prouve que $\boxed{z_3/z_1 \text{ est une solution de l'équation proposée}}$.

Exercice 2 : Équation différentielle d'ordre 2 – Valeur moyenne

1. On reconnaît une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 6$, d'où les solutions cherchées : toute les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ et ayant une écriture de la forme $y(x) = A\cos(6x) + B\sin(6x)$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. Si f est une solution de l'équation différentielle précédente, elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = A\cos(6x) + B\sin(6x)$$

pour où A et B sont deux constantes à déterminer. On a alors

$$f'(x) = -6A\sin 6x + 6B\cos 6x.$$

Les deux conditions initiales nous donnent alors le système

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{3} \\ 6B = 6 \end{cases} \Longrightarrow (A, B) = (\sqrt{3}, 1).$$

D'où l'expression de la fonction cherchée : $\boxed{f(x) = \sqrt{3}\cos 6x + \sin 6x}$.

3. Développpns l'expression proposée. Il vient

$$2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin(6x)\cos\frac{\pi}{3} + \cos(6x)\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sin(6x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6x)\right)$$

$$\text{et on a bien} \qquad \boxed{f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

4. Il nous faut donct calculer

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 1}\int_0^{\pi/6} f(x)\,dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/6} 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)\,dx = \frac{12}{\pi}\int_0^{\pi/6} \sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)\,dx \\ &= \frac{12}{\pi}\left[-\frac{1}{6}\cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi/6} = -\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi/6} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{m = \frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

Problème : avec logarithme et exponentielle

A

1. On trouve $\boxed{g(2) = 1 - 1/e^2 = 1 - e^{-2}} \approx 0,135$

2. On a

$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = 1} \qquad \text{puisque} \qquad g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^x} = 0$$

3. *a*) Il est bien clair que l'on a

$$\boxed{1 - \frac{x-1}{e^x} = g(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}.}$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$ puisque

$$g(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1/e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0 \quad \text{(formulaire)}$$

b) Le résulatt précédent signifie que la droite $\boxed{y = 1 \text{ est asymptote horizontale}}$ en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction g.

4. *a*) Reprenons la première écriture de $g(x)$. Il vient

$$g'(x) = -\frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(e^x)^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{g'(x) = \frac{x-2}{e^x}}.$$

b) *c*) Le signe de $g'(x)$ est alors celui de $(x-2)$ puisque e^x est toujours strictement positif. D'où le tableau de variation :

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\approx 0,135$	$\nearrow$	1

d) Au vu du tableau de variation; il est clair que $\boxed{g(x) \text{ est toujours positif}}$ puisque son minimum est strictement positif.

B **1.** *a*) On a $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty}$ puisque

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + \ln(x-1). \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 1} 1/e^x = 1/e \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} x-1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \ln(x-1) = -\infty$$

On en déduit que la droite $\boxed{\Delta \text{ d'équation } x = 1 \text{ est asymptote verticale}}$ à la courbe C.

b) En $+\infty$, on a $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + \ln(x-1). \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to +\infty} 1/e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$$

2. *a*) En utilisant les formules $(1/u)' = -u'/u^2$ et $(\ln u)' = u'/u$, il vient

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} + \frac{1}{x-1} = \boxed{\frac{-1}{e^x} + \frac{1}{x-1} = f'(x)}.$$

b) Or

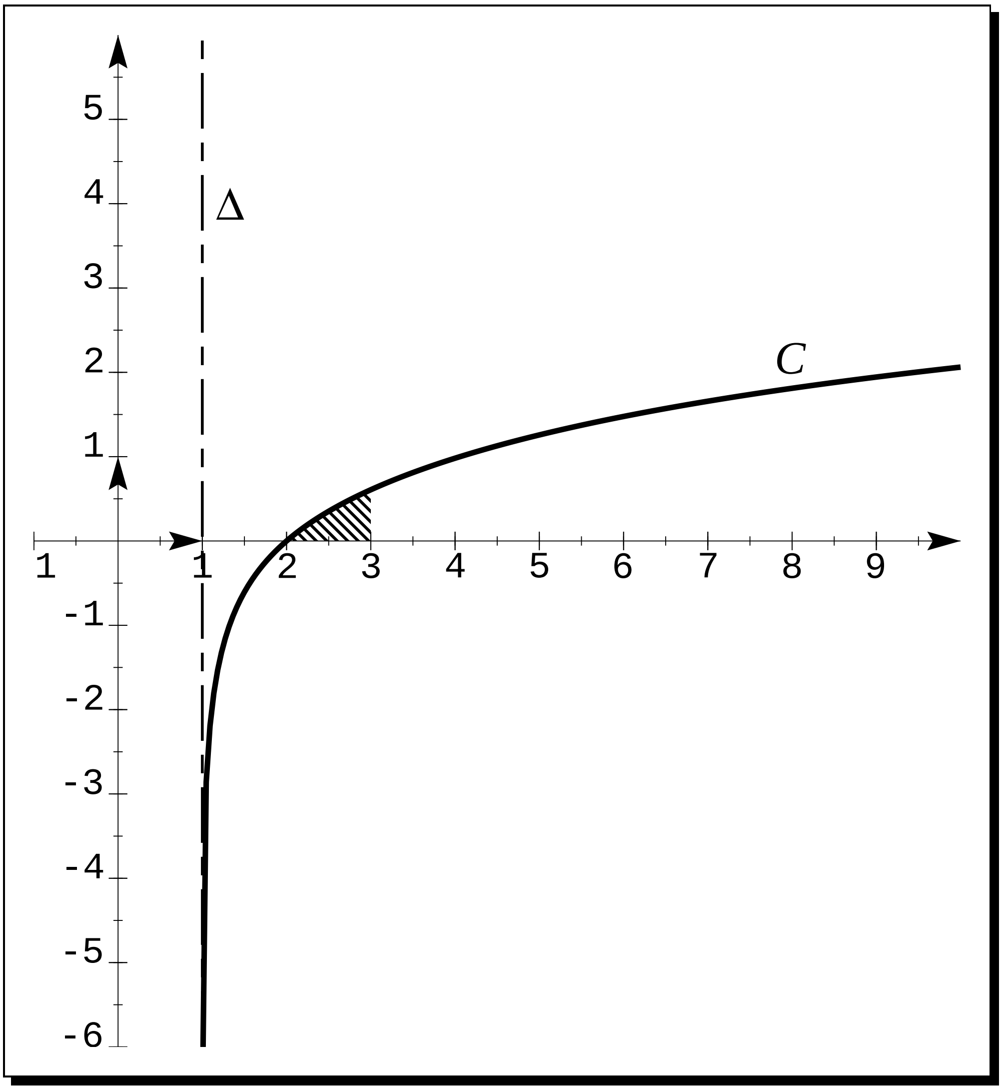
$$\frac{g(x)}{x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{e^x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}}.$$

c) On a montré précédemment que $g(x)$ était toujours strictement positif sur l'intervalle considéré, donc $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$, qui est toujours positif sur l'intervalle, d'où le tableau de variation :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

3. *a*) On trouve $\boxed{f(2) = 0}$.

b)



C **1.** Calculons la dérivée de F. Il vient

$$F'(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2} + \ln(x-1) + \frac{(x-1)}{(x-1)} - \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)$$
$$= \frac{1}{e^x} + \ln(x-1) + 1 - 1 - \frac{1}{e^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F'(x) = f(x)}$$

ce qui prouve que $\boxed{F \text{ est une primitive de } f}$.

2. *a*) L'unité d'aire étant de 5 cm ×5 cm = 25 cm^2, il vient

$$\mathcal{A} = 25 \times \int_2^3 f(x)\,dx = 25 \times \Big[F(x)\Big]_2^3 = 25 \times \big(F(3) - F(2)\big) \quad \text{soit, après calcul} \quad \boxed{\mathcal{A} = 25(2\ln 2 - e^{-3} - 1)\,\text{cm}^2}$$

b) D'où $\boxed{\mathcal{A} \approx 8,41\,\text{cm}^2}$.