Devoir surveillé n° 4

durée : 2h

Exercice : (*10 points*) Études de fonctions polynômes, résolution approchée d'équation

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm sur Ox et 1 cm sur Oy.

– Partie A – Étude d'une fonction polynôme de degré 2 –

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 1.$$

1. *a*) Déterminer f', la fonction dérivée de f.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-3; 4]$.
   c) En déduire le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
3. Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

– Partie B – Étude d'une fonction polynôme de degré 3 –

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3, 4]$ par

$$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1.$$

1. *a*) Déterminer la fonction dérivée g'.
   b) Expliquer pourquoi $g'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.
   c) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3, 4]$.
2. *a*) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3, 4]$? (Justifier.) On note α la plus grande de ces solutions.
   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α (justifier).
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
4. Tracer la courbe C_g dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice : (*10 points*) Complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau si vous préférez).

1. On considère les deux nombres complexes

$$z_A = \left[4, \frac{\pi}{3}\right] \qquad \text{et} \qquad z_B = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

   a) Déterminer la forme algébrique du nombre z_A.
   b) Déterminer la forme trigonométrique du nombre z_B.
   c) Placer dans le plan les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. (On laissera des traces des constructions.)
2. On considère les deux nombres complexes

$$z_C = -4 \qquad \text{et} \qquad z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

   a) Calculer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.
   b) Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D.
3. *a*) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
   b) Démontrer que D est le milieu du segment $[AC]$.
   c) Démontrer que le triangle BDA est rectangle.
   d) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.