Calculs trigonométriques

Exercice 1 : Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$.

1. Prouver que f est paire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Exercice 2 : Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cos x$.

1. Prouver que f est impaire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Exercice 3 : Établir une formule de trigonométrie

Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie pour tout réel x :

$$\left(\sin x + \cos x\right)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

Exercice 4 : Déterminer une coordonnée manquante – Utilisation des symétries

1. *a*) Sachant que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, démontrer que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b) En déduire que

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

2. En déduire les sinus et cosinus de

$$a = \frac{11\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{23\pi}{12}$$

Exercice 5 : Application d'une formule de trigonométrie

Dans cet exercice, on admet que l'on a, pour tout réel x,

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

et l'on va utiliser cette formule pour déterminer quelques sinus et cosinus « exotiques ».

1. On donne

$$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{avec} \qquad x \in I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

a) Calculer $\sin x$.

b) En déduire $\sin 2x$.

c) Déterminer un encadrement de $2x$ lorsque x est dans l'intervalle I.

d) Déduire des questions précédentes que $x = \frac{\pi}{8}$.

2. On donne

$$\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \qquad \text{avec} \qquad x \in I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

a) Calculer $\sin 2x$ en procédant comme précédemment.

b) En déduire x.

Exercice 6 : Établir une formule de trigonométrie

Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie pour tout réel x :

$$\left(1 + \sin x + \cos x\right)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x).$$