Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : Décomposition en produit de nombres premiers

1. On trouve $\boxed{1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7}$. **2.** d'où $\sqrt{1\,008} = 2^2 \times 3\sqrt{7}$, soit $\boxed{\sqrt{1\,008} = 12\sqrt{7}}$

Exercice 2 : Calculs avec des fractions

1. Il vient

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{7-4}{21} = \frac{3}{21}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = \frac{1}{7}}.$$

2. Et

$$B = \frac{1 + \frac{2}{5}}{\frac{5}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{10-3}{6}} = \frac{7}{5} \times \frac{6}{7} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = \frac{6}{5} = 1,2}.$$

Exercice 3 : Une fraction avec radical au dénominateur

Il vient

$$B = \frac{3}{2-\sqrt{5}} = \frac{3(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{6+3\sqrt{5}}{4-5} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = -6 - 3\sqrt{5}}$$

Exercice 4 : Des racines carrées...

On trouve facilement

$$\begin{aligned}(3\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} &= 3\sqrt{2} + 6 - 1 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 5\end{aligned}$$

Le nombre proposé $\boxed{\text{est donc bien un entier}}$.

Exercice 5 : Des puissances...

Il vient

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{5} = \frac{3^{-2}}{\left(2^2\right)^{-2}} \times \frac{1}{\left(2^3\right)^{5}} = \frac{3^{-2}}{2^{-4}} \times \frac{1}{2^{15}} = \frac{3^{-2}}{2^{11}} \qquad \boxed{= 3^{-2} \times 2^{-11}}$$

Exercice 6 : Puissances

Il vient

$$A = \frac{\left(10^5\right)^4 \times \left(3 \times 10^2\right)^{-2}}{1+3^2} = \frac{10^{20} \times 3^{-2} \times 10^{-4}}{10} = 10^{20} \times 3^{-2} \times 10^{-4} \times 10^{-1}$$

soit $\boxed{A = 3^{-2} \times 10^{15}}$.

Exercice 7 : Calculatrice et exactitude

1. *a*) Pour $x = 10^4$, on trouve avec ma calculatrice $\boxed{A \approx 0,999\,999\,9}$ et $\boxed{B \approx 0,999\,999\,996\,3}$

b) Pour $x = 10^{18}$, on trouve, toujours avec ma calculatrice $\boxed{A \approx 0}$ et $\boxed{B \approx 1}$

c) Et enfin pour $x = -3$, on trouve avec la même calculatrice $\boxed{A \approx -0,959\,799\,964}$ et $\boxed{B \approx -0,959\,799\,964}$

2. Cherchons à écrire B sans radical au dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&= \frac{2x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}{(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}\\
&= \frac{2x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}{(\sqrt{x^2+x+1})^2-(\sqrt{x^2-x+1})^2}\\
&= \frac{2x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}{x^2+x+1-x^2+x-1}\\
&= \frac{2x(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}{2x} = \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{A = B}$.

Autre méthode : Il vient

$$\begin{aligned}
A = B \quad &\iff \quad \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&\iff \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right) = 2x\\
&\iff \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2 = 2x\\
&\iff \quad \left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right) = 2x\\
&\iff \quad x^2+x+1-x^2+x-1 = 2x\\
&\iff \quad 2x = 2x
\end{aligned}$$

La dernière égalité est toujours vraie, donc la première l'est aussi et $\boxed{A = B}$.

3. Les étrangetés observées dans la question **1.** proviennent des $\boxed{\text{erreurs d'arrondis}}$ dans la calculatrice.