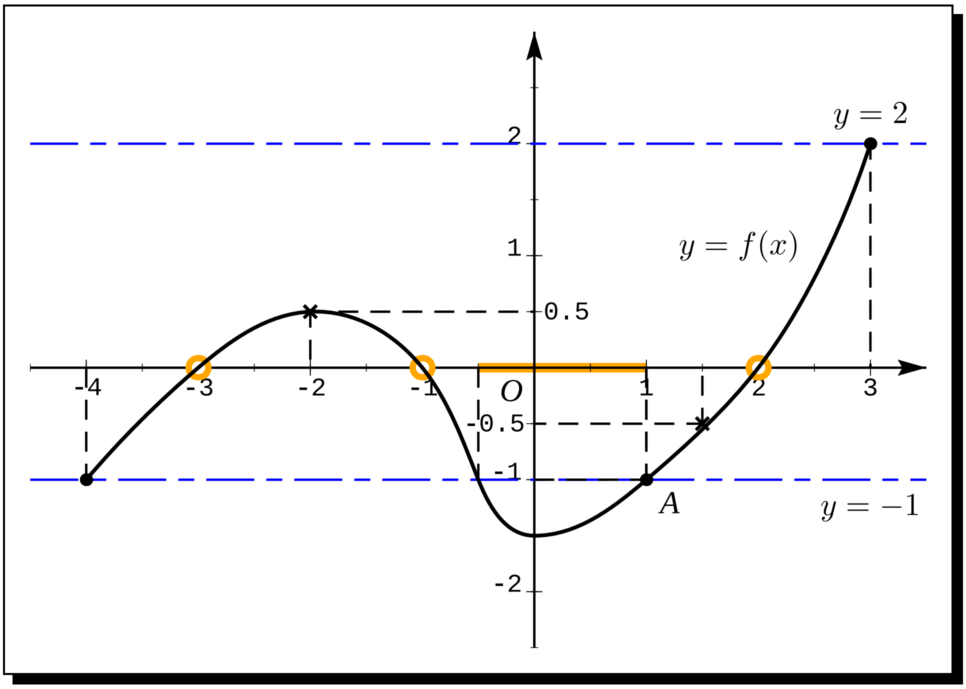
Corrigé du devoir commun de mathématique

Exercice 1 : Lecture de graphique



1. On lit $\boxed{\mathcal{D}_f = [-4; 3]}$.
2. Les coordonnées de A sont $\boxed{A(1; -1)}$, ce qui signifie que $\boxed{-1 \text{ est l'image de } 1 \text{ par } f}$, ou, autrement dit, que $\boxed{1 \text{ est un antécédent de } -1 \text{ par } f}$.
3. Par f, $\boxed{\text{l'image de } -2 \text{ est } 0,5}$ alors que $\boxed{\text{l'image de } 1,5 \text{ est } -0,5}$.
4. Et -1 admet $\boxed{3 \text{ antécédents par } f : -4,\ -0,5 \text{ et } 1}$ alors que 2 n'en admet qu' $\boxed{\text{un seul} : x = 3}$.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe de f (d'équation $y = f(x)$) avec l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$). On trouve donc $\boxed{3 \text{ solutions} : -3,\ -1 \text{ et } 2}$.
6. De la même façon, résoudre l'inéquation proposée revient à chercher les abscisses des points de la courbe de f (équation $y = f(x)$) qui sont en dessous des points de la droite horizontale d'équation $y = -1$. On lit alors la réponse :

$$f(x) \leqslant -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in [-0,5; 1] \cup \{4\}}$$

7. Le $\boxed{\text{maximum de } f \text{ est } M = 2}$, et il est atteint pour $\boxed{x = 3}$.
8. Le $\boxed{\text{minimum de } f \text{ est } m = -1,5}$, et il est atteint pour $\boxed{x = 0}$.

Exercice 2 : Images de nombres par une fonction

1. Il vient

$$f\left(\frac{19}{3}\right) = \frac{3\times\frac{19}{3}-1}{\frac{19}{3}-3} = \frac{19-1}{\frac{19-9}{3}} = 18\times\frac{3}{10} = \frac{2\times 3^3}{2\times 5} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f\left(\frac{19}{3}\right) = \frac{3^3}{5} = \frac{27}{5}}.$$

et

$$f(3+\sqrt{5}) = \frac{3\times(3+\sqrt{5})-1}{(3+\sqrt{5})-3} = \frac{9+3\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{8+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{f(3+\sqrt{5}) = \frac{8\sqrt{5}+15}{5} = 3+\frac{8}{5}\sqrt{5}}$$

2. On trouve facilement

$$\boxed{g(-1) = -8} \qquad \boxed{g(2) = 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{g(1+\sqrt{5}) = -5+2\sqrt{5}}$$

3. On trouve $g(\sqrt{3}) = -3+4\sqrt{3}-3 \neq 0$, donc le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 0)$ $\boxed{\text{n'appartient pas à la courbe}}$ représentative de la fonction g.

Exercice 3 : Des puissances. . .

1. En remarquant que $8^{2003} = 8\times 8^{2002}$ et en factorisant par le facteur commun 8^{2002} dans l'expression proposée, il vient

$$8^{2002}+8^{2003} = 8^{2002}+8\times 8^{2002} = 8^{2002}\times(1+8) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{8^{2002}+8^{2003} = 8^{2002}\times 9}.$$

2. En utilisant la décomposition $8 = 2^3$ dans l'égalité précédente, il vient

$$8^{2002}+8^{2003} = 2^{3^{2002}}\times 9 = 2^{3\times 2002}\times 3^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{8^{2002}+8^{2003} = 2^{6006}\times 3^2}.$$

Exercice 4 : Parallélogramme et triangle isocèle

1. On a $\boxed{(IB)\parallel(DJ)}$ puisque $ABCD$ parallélogramme avec $I\in(AB)$ et $J\in(DC)$. Et on a $\boxed{IB = DJ}$ puisque ces 2 longueurs sont égales à $\frac{1}{2}AB$ (car I et J milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$ par hypothèse).

Le quadrilatère $\boxed{DJBI \text{ est donc un parallélogramme}}$ puisqu'il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

2. Le fait que $DJBI$ soit un parallèlogramme implique en particulier que $\boxed{(DI)\parallel(BJ)}$, ce qui prouve que $\boxed{(AH)\perp(DI)}$ puisque (AH) perpendiculaire à (BJ) par hypothèse (lorsque 2 droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre).

3. Dans le triangle ABH, le point $\boxed{I \text{ est le milieu de } [AB]}$ (par hypothèse) et $\boxed{(BH) \text{ est parallèle à } (IM)}$ (puisque $(ID)\parallel(BJ)$ d'après la question **1.** et que l'on a $H\in(BJ)$ et $M\in(ID)$). Le théorème des milieux permet de conclure que $\boxed{M \text{ est le milieu de } [AH]}$.

Finalement, la droite (DI) est perpendiculaire à (AH) (d'après la question **2.**) et elle passe par le milieu de $[AH]$. C'est donc $\boxed{\text{la médiatrice de } [AH]}$.

4. Pour finir, et par définition de la médiatrice, tout point de la médiatrice de $[AH]$ est à égale distance des points A et H. Le point D étant sur cette médiatrice, on a $AD = DH$ et $\boxed{\text{le triangle } ADH \text{ est isocèle}}$.

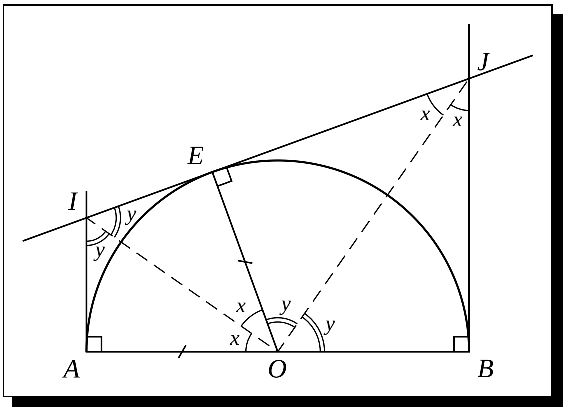
Exercice 5 : Tangentes à un cercle, triangles semblables

1. *a*) Les triangles OAI et OEI ont le $\boxed{\text{côté } OI \text{ en commun}}$. De plus $\boxed{OA = OE}$ puisque ce sont 2 rayons du demi-cercle. Pour finir, on remarque que OAI et OEI sont par hypothèse des triangles rectangles, et le théorème de Pythagore permet facilement de conclure à l'égalité $\boxed{AI = IE}$ puisque l'on a l'égalité des hypothénuses et de l'un des côtés. Plus précisément,

$$AI = \sqrt{OI^2 - OA^2} = \sqrt{OI^2 - OE^2} = IE$$

Finalement, les triangles $\boxed{OAI \text{ et } OEI \text{ sont isométriques}}$ puisqu'ils ont trois côtés égaux 2 à 2.

Une démonstration tout à fait analogue prouverait que les triangles $\boxed{OEI \text{ et } OBI \text{ sont isométriques}}$.



b) Les triangles OAI et OEI étant isométriques, ils sont en particulier semblables et ils ont les mêmes angles. En particulier, on a $\boxed{\widehat{AOI} = \widehat{IOE}}$. On notera $x = \widehat{AOI}$.

Un raisonnement analogue pour les triangles OEI et OBI prouve que $\boxed{\widehat{EOI} = \widehat{IOB}}$. On notera $y = \widehat{EOI}$.

Il est alors clair que $2x + 2y = 180$, et donc $x + y = 90$ or $\widehat{IOJ} = x + y$. On a donc finalement prouvé que $\boxed{\widehat{IOJ} = 90}$, autrement dit que le triangle $\boxed{IOJ \text{ est rectangle}}$.

2. *a*) Dans un triangle, la somme des angles fait 180°. Appliqué au triangle OEI, et en se rappelant que $x+y = 90$, on voit que $\boxed{\widehat{EIO} = x}$. De la même manière, dans le triangle OAI, on a clairement $\boxed{\widehat{OIA} = y}$.

Finalement, les triangles OEI et OEJ ont trois angles égaux 2 à 2 (de mesures respectives, x, y et 90), ce qui prouve qu' $\boxed{\text{ils sont semblables}}$.

b) Les triangles OEI et OEJ étant semblables, on a les égalités de rapports

$$\frac{EJ}{OE} = \frac{OJ}{OI} = \frac{OE}{IE} \qquad \text{or} \qquad OE = OA = R$$

et donc en particulier

$$\frac{EJ}{R} = \frac{R}{IE} \qquad \text{or} \qquad \boxed{EJ \times IE = R^2}$$

On se rappelle ensuite que les triangles OAI et OEI étant isométriques (d'après question **1.**), on a $EI = AI$, puis, de la même façon, que $EJ = BJ$ puisque OEI et OBI sont isométriques (toujours d'après question **1.**). En reportant dans l'égalité précédente, on a alors $\boxed{AI \times BJ = R^2}$.