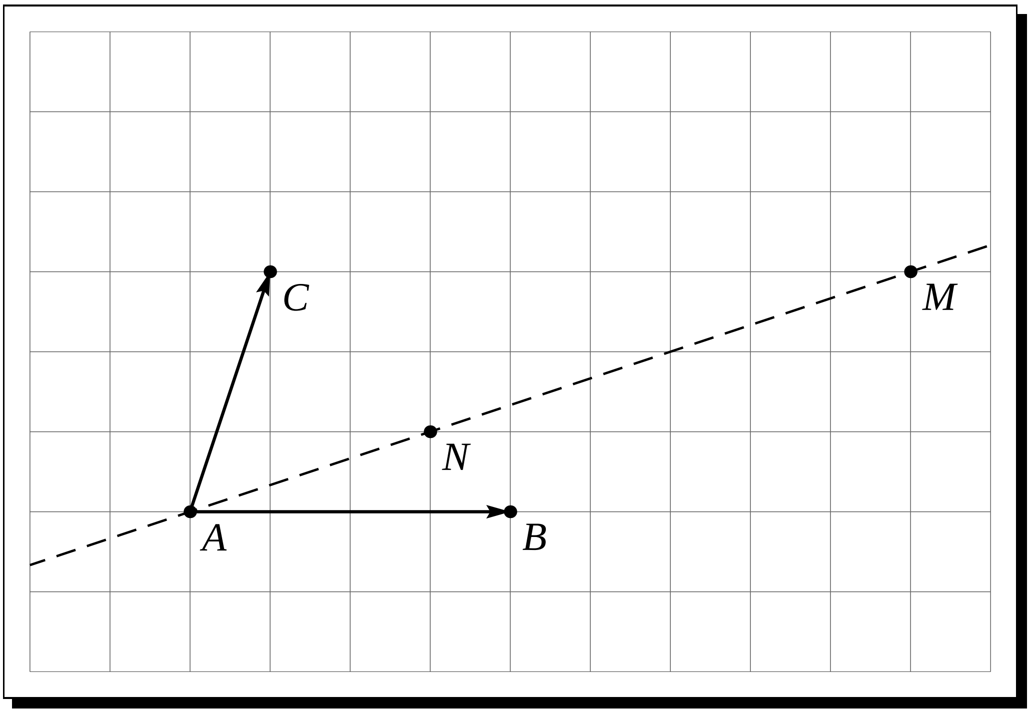
Corrigé du devoir surveillé nº 7

Exercice 1 : (*4 points*) **Démontrer un alignement avec des vecteurs**

1.



2. On a

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Utilisons la relation (2) : il vient

$$\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \iff \boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

3. On voit alors facilement que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, et donc que les $\boxed{\text{points } A, M \text{ et } N \text{ sont alignés}}$.

Exercice 2 : (*2 points*) **Chercher un parallélogramme**

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que l'on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Posons $D(x_D; y_D)$ où x_D et y_D sont inconnues, puis calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que celles du vecteur $\overrightarrow{DC}$. Il vient

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1/2 + 3/2 \\ 5/2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1/2 - x_D \\ 3 - y_D \end{pmatrix}$$

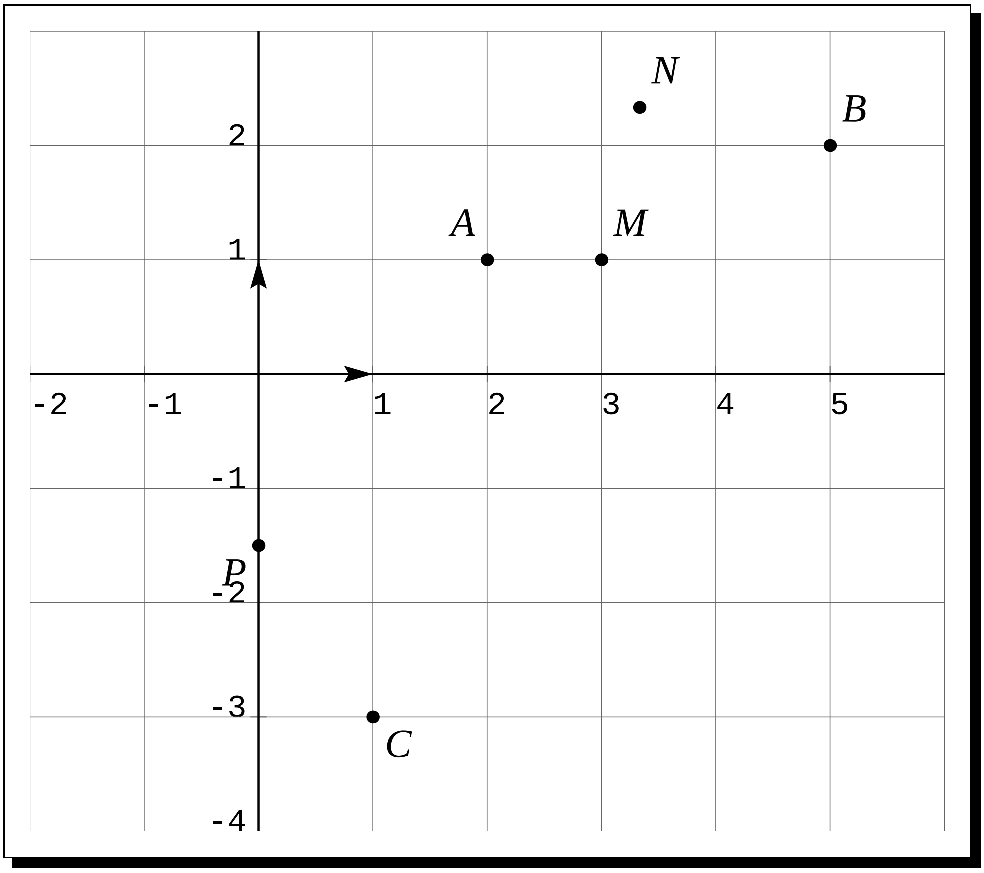
Pour avoir un parallélogramme, il est donc nécessaire d'avoir

$$\begin{cases} 1/2 - x_D = 2 \\ 3 - y_D = 3/2 \end{cases} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{cases} x_D = 1/2 - 2 = -3/2 \\ y_D = 3 - 3/2 = 3/2 \end{cases}$$

Finalement notre point D a pour coordonnées $\boxed{D\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)}$.

Exercice 3 : (*4 points*) **Repère, constructions, coordonnées**

1. 2.



3. Notons $M(x_M; y_M)$. Il vient :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \boxed{M(3; 1)}$$

De la même façon, notons $N(x_N; y_N)$. Il vient :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \iff \begin{pmatrix} x_N - 3 \\ y_N - 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

On a donc le système

$$\begin{cases} x_N - 3 = 1/3 \\ y_N - 1 = 4/3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_N = 3 + 1/3 \\ y_N = 1 + 4/3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{N\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)}$$

Pour finir, notons $P(x_P ; y_P)$. Il vient :

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \iff \begin{pmatrix} x_P - 5 \\ y_P - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 1-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

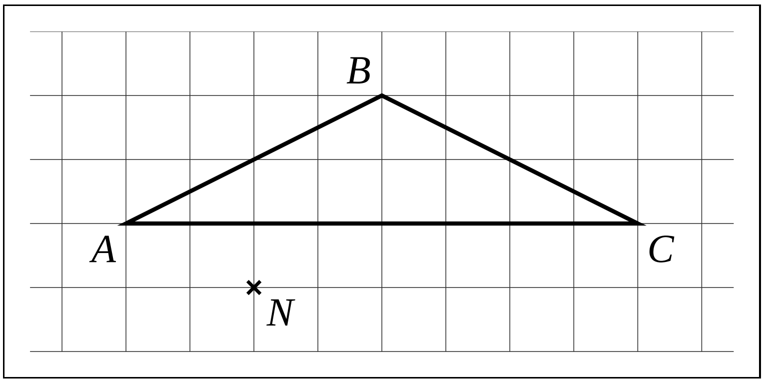
D'où le système

$$\begin{cases} x_P - 5 = -5 \\ y_P - 2 = -7/2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = -1/2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)}$$

Exercice 4 : (*3 points*) **Petit problème de construction**

Il vient

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} \\ \iff \quad & \overrightarrow{NA} + \underbrace{\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB} \\ \iff \quad & 2\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ \iff \quad & \overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$



Exercice 5 : (*7 points*) **Calcul vectoriel**

1. On lit sur le dessin $\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$, $\boxed{\beta = -\frac{1}{3}}$, et $\boxed{\gamma = \frac{3}{7}}$. Autrement dit, on a

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

2. En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

3. Utilisons encore la relation de Chasles. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\frac{1}{4} + 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \\
&= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7}\right)\overrightarrow{AB} + +\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}. \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}}.
\end{aligned}$$

4. Utilisons maintenant la relation du **2.** et multiplions la par $-9/7$. Il vient

$$-\frac{9}{7}\overrightarrow{PR} = -\frac{9}{7} \times \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{9}{7} \times \frac{-1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{soit} \quad -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}}.$$

On en conclut que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{PQ} \text{ et } \overrightarrow{PR} \text{ sont colinéaires}}$, et, par suite, que les points $\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés}}$.