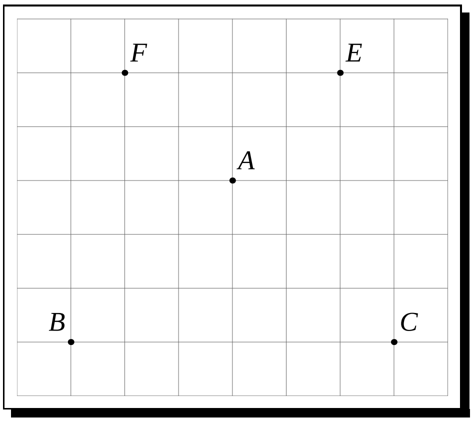
Corrigé du devoir surveillé n° 8

durée : 2h

Exercice 1 : (*3 points*) **Démontrer avec des vecteurs**

1.



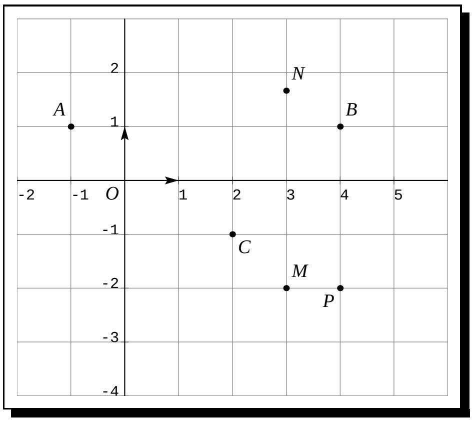
2. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}\end{aligned}$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ sont égaux. Ils ont donc en particulier la même direction, ce qui signifie qu'ils sont porté par des droites parallèles. On en déduit que $\boxed{(EF) \parallel (BC)}$.

Exercice 2 : (*3 points*) **Repère, constructions, coordonnées**

1. 2.



3. Notons $M(x_M; y_M)$. Il vient :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AC} \iff \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{M(3;-2)}$$

De la même façon, notons $N(x_N; y_N)$. Il vient :

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \iff \begin{pmatrix} x_N-4 \\ y_N-1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

On a donc le système

$$\begin{cases} x_N - 4 = -1 \\ y_N - 1 = 2/3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_N = 3 \\ y_N = 1 + 2/3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{N\left(3; \frac{5}{3}\right)}$$

Pour finir, notons $P(x_P; y_P)$. Il vient :

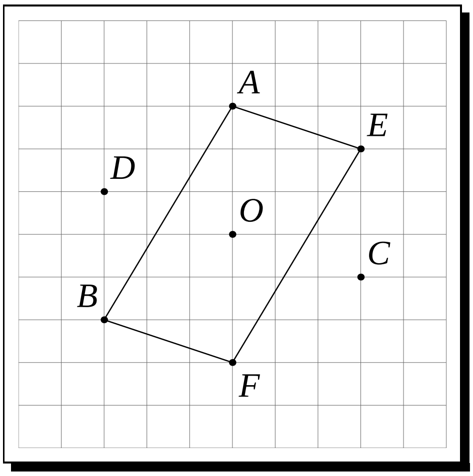
$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} \iff \begin{pmatrix} x_P - 4 \\ y_P - 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1-4 \\ 1-1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où le système

$$\begin{cases} x_P - 4 = 0 \\ y_P - 1 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = 4 \\ y_P = -2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(4; -2)}$$

Exercice 3 : (*4 points*) Démontrer avec des vecteurs (milieu et parallélogramme)

1.



2. On a par hypothèse

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

On en déduit alors que $\boxed{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}}$, ce qui prouve que $\boxed{O \text{ est le milieu de } [CD]}$.

3. On sait par hypothèse que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AE}$$

Et de la même façon, sachant par hypothèse que $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on en déduit

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BF} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BF}$$

Finalement, on a donc $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}}$, ce qui prouve que $\boxed{ABFE \text{ est un parallélogramme}}$.

Exercice 4 : (*10 points*) Un petit problème en géométrie analytique

1. On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

d'où les distances

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \qquad BC = 15 \qquad AC = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Il est alors facile de vérifier Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui prouve que $\boxed{ABC \text{ rectangle en } A}$.

Une autre méthode, plus rapide, consiste à déterminer les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, pour vérifier ensuite que le produit de ces coefficients fait bien -1, prouvant ainsi l'orthogonalité des droites considérées.

2. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. En posant D de coordonnées inconnues (x_D, y_D), la relation précédente nous donne le système :

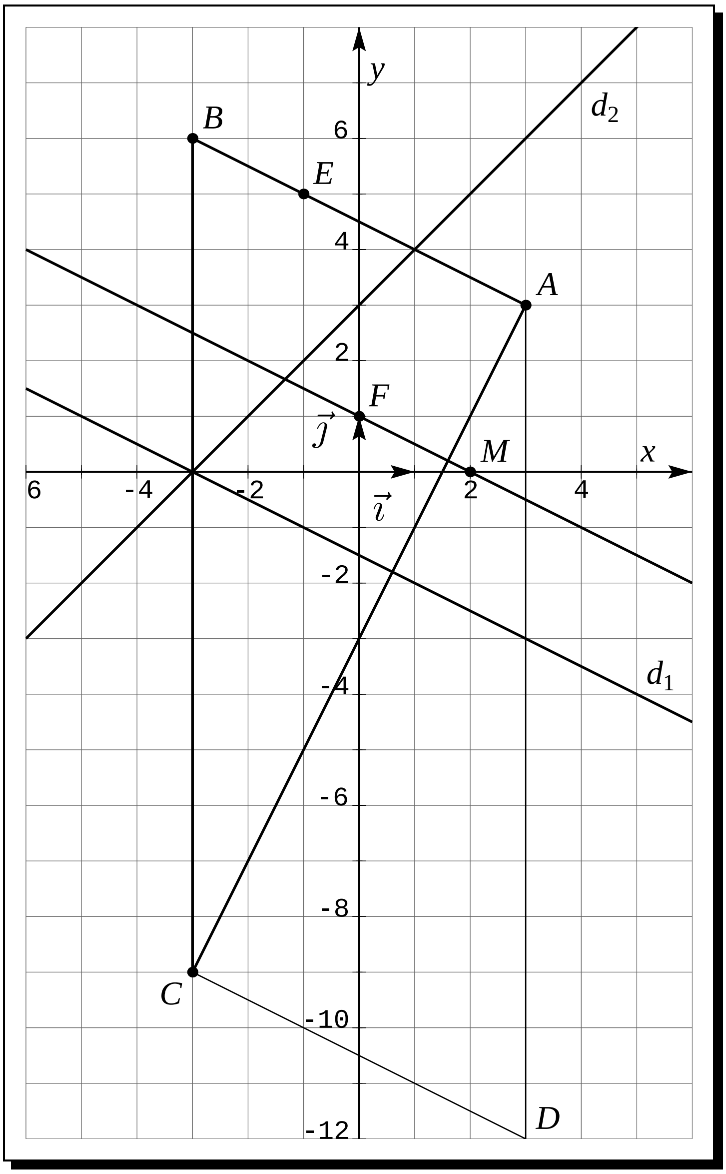
$$\begin{pmatrix} x_d - 3 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -15 + 3 = -12 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{D(3; -12)}$$

3. Les points A, B et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA}$ sont colinéaires. Or

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La relation de colinéarité donne alors $-6 \times (-2) - 3 \times 4 = 0$, ce qui prouve que ces vecteurs sont colinéaires, et donc que $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } E \text{ sont alignés}}$.

4. *a*)



Nous connaissons le coeeficient directeur de la droite Δ, ce qui nous permet d'affirmer que son équation réduite est de la forme

$$\Delta \ : y = -\frac{1}{2}x + b$$

où b est une constante réelle à déterminer. Sachant que le point F appartient à Δ, on en déduit que les coordonnées de F vérifient cette équation et que l'on a la relation

$$1 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \qquad \text{d'où} \qquad b = 1.$$

L'équation réduite de Δ est donc finalement $\boxed{\Delta\ : y = -\frac{1}{2}x + 1}$.

b) Procédons de la même manière que précédemment. Sachant que

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

on en déduit que le coefficient directeur de (AC) est $-12/-6 = 2$. Reste à utiliser le fait que les coordonnées de Avérifient l'équation de la droite (AC) pour trouver l'ordonnée à l'origine. Tous calculs faits, on trouve l'équation réduite $\boxed{(AC)\ : y = 2x - 3}$.

5. *a*) L'équation réduite de la droite d_1 est

$$d_1\ : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Les points $(1; -2)$ et $(-1; 1)$, par exemple, sont sur cette droite.

b) On vérifie facilement que les coordonnées de G vérifient les équations des droites d_1 et d_2. Ainsi, on a bien

$$-3 + 3 + 2 \times 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = -3 + 3.$$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{le point } G \text{ appartient à } d_1 \text{ et à } d_2}$.

6. Soit $M(x, y)$ le point inconnu. On a

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FE} \\ \iff & \begin{pmatrix} 3-x \\ 3-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0-x \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} 3-2x \\ 4-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} 3-2x = -1 \\ 4-2y = 4 \end{cases} \iff (x, y) = (2, 0) \end{aligned}$$

d'où les coordonnées cherchées $\boxed{M(2, 0)}$.

7. *a*) Connaissant l'équation de la droite d_1, il suffit de trouver y lorque $x = 1$. D'où le point cherché : $\boxed{(1, -2)}$

b) Même raisonnement avec d_2 : que vaut x si $y = 2$. On trouve $\boxed{(-1; 2)}$.