Corrigé du devoir surveillé n° 9

Exercice 1 : Problème d'encadrement

On a donc

$$(1) \quad \frac{1}{8} < x < \frac{1}{7} \qquad\qquad (2) \quad \frac{1}{7} < y < \frac{1}{6}$$

1. Par addition des inégalités (1) et (2), on a

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{7} < x + y < \frac{1}{7} + \frac{1}{6} \iff \frac{7+8}{8 \times 7} < x + y < \frac{6+7}{7 \times 6} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{15}{56} < x + y < \frac{13}{42}}$$

2. Les inégalités (1) et (2) sont des inégalités entre **des nombres strictement positifs**, ce qui nous autorise à multiplier ces inégalités. On obtient alors

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} < x + y < \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{56} < xy < \frac{1}{42}}$$

3. On a

$$\frac{1}{7} < y < \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{7} > -y > -\frac{1}{6} \quad \text{soit encore} \quad -\frac{1}{6} < -y < -\frac{1}{7}$$

En additionnant cette dernière inégalité avec l'inégalité (1) du texte, on obtient alors

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{6} < x - y < \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \iff \frac{6-8}{8 \times 6} < x - y < 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{-\frac{1}{24} < x - y < 0}$$

Exercice 2 : Problème d'encadrement

Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} < x < \frac{1}{4} &\implies \frac{1}{5^2} < x^2 < \frac{1}{4^2} \quad \text{puisque } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \\
&\implies -\frac{2}{25} > -2x^2 > -\frac{2}{16} \\
&\implies \frac{1}{2} - \frac{2}{25} > \frac{1}{2} - 2x^2 > \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{3}{8} < \frac{1}{2} - 2x^2 < \frac{21}{50}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Une inéquation rationnelle

Le tableau de signes s'impose. Il vient :

x	$-\infty$		$-3/2$		$3/2$		$+\infty$
$3-2x$		+		+	0	−	
$2x+3$		−	0	+		+	
quotient		−	‖	+	0	−	

d'où le résultat :

$$\frac{3-2x}{2x+3} \geqslant 0 \iff \boxed{x \in \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]}$$

Exercice 4 : Équation et inéquation rationnelle

1. Il vient

$$g(x) = 3 \iff \frac{2x+1}{x-1} = 3 \iff 2x+1 = 3x-3 \iff \boxed{x=4}.$$

2. L'inéquation est plus difficile puisque le produit en croix est interdit (possible seulement pour les équations, comme à la question précédente). Il ne reste que la solution de réduire au même dénominateur pour comparer à zéro. Il vient :

$$g(x) \geqslant 4 \iff \frac{2x+1}{x-1} - 4 \geqslant 0 \iff \frac{2x+1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{-2x+5}{x-1} \geqslant 0.$$

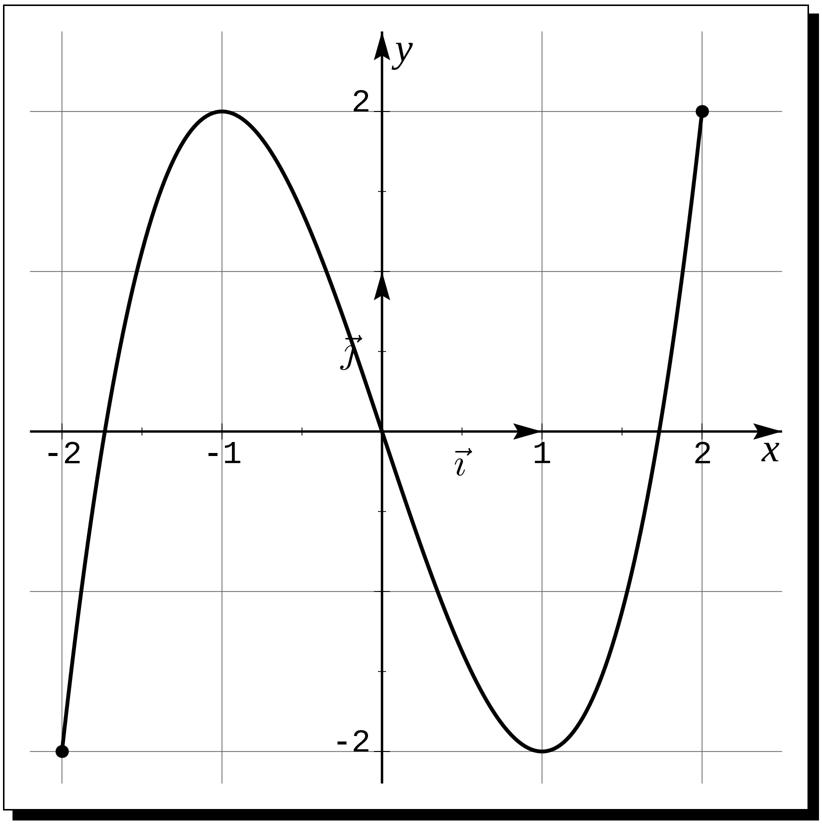
Un tableau de signes permet alors de conclure :

x	$-\infty$		1		$5/2$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

d'où : $g(x) \geqslant 4$ si et seulement si $\boxed{x \in]1;5/2]}$.

Exercice 5 : Une fonction impaire à déterminer

1.



2. On lit :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

3. Des 2 fonctions proposées, c'est $\boxed{g(x) = x^3 - 3x}$ qu'il faut choisir : c'est la seule des 2 fonctions qui soit impaire, et c'est la seule dont la courbe représentative passe par l'origine $O(0, 0)$ (autrement dit, c'est la seule à vérifier $g(0) = 0$).

4. *a*) Il vient

$$x^3 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 3) = 0 \iff x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

On a un produit de 3 facteurs égal à zéro, donc l'un des facteurs est nul. D'où l'ensemble des solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}}$.

b) De la même façon que précédemment, il vient :

$$x^3 - 3x \leqslant 0 \iff x(x^2 - 3) \leqslant 0 \iff x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leqslant 0$$

Un tableau de signes permet alors de conclure :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - \sqrt{3}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]}$.

5. Chercher les antécédents de 0 par g revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$. La question **4.**a) permet alors de répondre immédiatement : $\boxed{\text{0 possède 3 antécédents par } g : -\sqrt{3}, 0 \text{ et } \sqrt{3}}$.