Corrigé du devoir surveillé n° 11

Exercice 1 : Algèbre : équations diverses

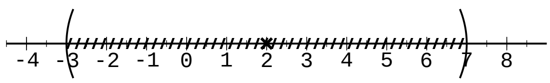
1. Le tableau de signes s'impose. Il vient :

x	$-\infty$		$2/3$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

d'où l'ensemble des solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{2}{3}; 2\right]}$.

2. L'équation $|x+3| = 4$ se lit « *la distance de* x *à* -3 *est* 4 ». Un simple dessin permet alors de conclure : il y a $\boxed{\text{2 solutions : 1 et } -7}$.

3. L'inéquation $|x-2| < 5$ se lit « *la distance de* x *à* 2 *est strictement inférieure à* 5 ».



On lit immédiatement l'ensemble des solutions : $\boxed{\mathcal{S} =]-3; 7[}$.

4. En utilisant la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il vient

$$\sin^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \iff \sin x = \frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{3}{5}.$$

Or l'on sait que x est dans l'intervalle $[-\pi/2; 0]$, donc son sinus est négatif. On en déduit alors $\boxed{\sin x = -3/5}$.

Exercice 2 : Étude d'une fonction polynome – Équation, inéquation

1. Développons l'expression proposée. Il vient :

$$-(x-2)^2 + 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 3 = -x^2 + 4x - 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{-x^2 + 4x - 1 = f(x) = -(x-2)^2 + 3}$$

2. *a*) Il s'agit de montrer que

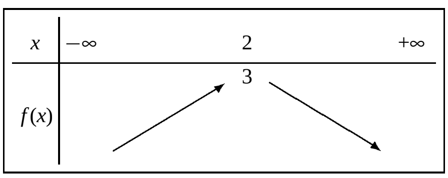
$$\text{si} \quad a \leqslant b \leqslant 2 \quad \text{alors} \quad f(a) \leqslant f(b).$$

On suppose donc $a \leqslant b \leqslant 2$ et on utilise la deuxième écriture de $f(x)$. Il vient

$$\begin{aligned}
a \leqslant b \leqslant 2 \quad &\Longrightarrow \quad a-2 \leqslant b-2 \leqslant 0 \\
&\Longrightarrow \quad (a-2)^2 \geqslant (b-2)^2 \geqslant 0 \qquad \text{puisque } x \mapsto x^2 \text{ décroissante sur }]-\infty; 0] \\
&\Longrightarrow \quad -(a-2)^2 \leqslant -(b-2)^2 \leqslant 0 \qquad \text{puisque l'on multiplie par } -1 \text{ qui est négatif} \\
&\Longrightarrow \quad -(a-2)^2 + 3 \leqslant -(b-2)^2 + 3 \leqslant 3 \qquad \text{c'est à dire} \quad \boxed{f(a) \leqslant f(b)} \leqslant 3.
\end{aligned}$$

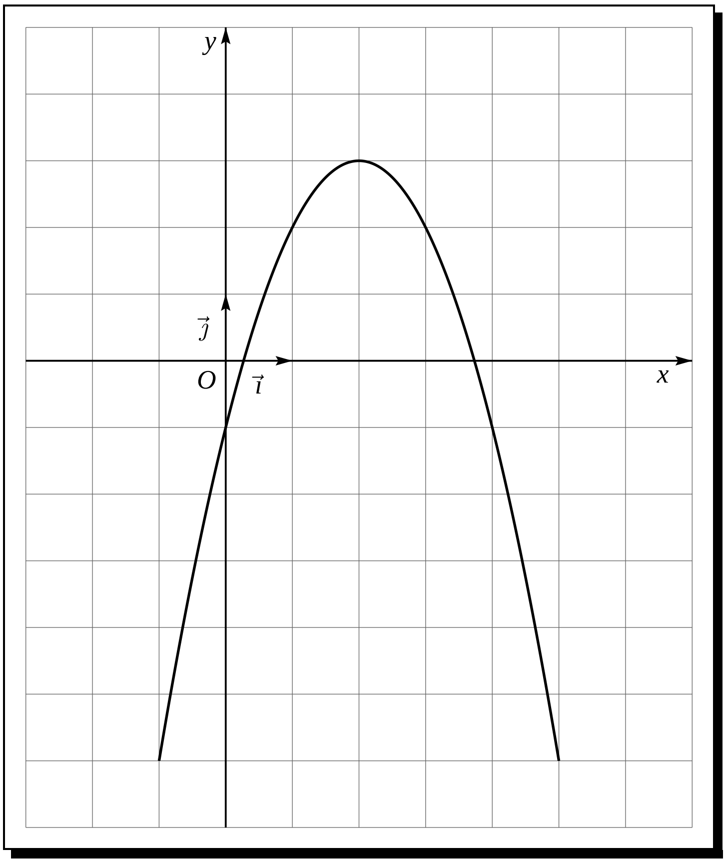
Ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty; 2]}$.

b) *c*) On obtient finalement les tableaux suivant :



x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6

d) et la courbe représentative de la fonction f sur $[-1;5]$



3. a) Il vient

$$f(x)=-1 \iff -x^2+4x-1=-1 \iff -x^2+4x=0 \iff x(4-x)=0$$

et ce produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où les $\boxed{\text{2 solutions : 0 et 4}}$.

b) Il vient

$$f(x)\geqslant 2 \iff -(x-2)^2+3\geqslant 2 \iff 1-(x-2)^2\geqslant 0$$
$$\iff \big(1+(x-2)\big)\big(1-(x-2)\big)\geqslant 0 \iff (x-1)(3-x)\geqslant 0.$$

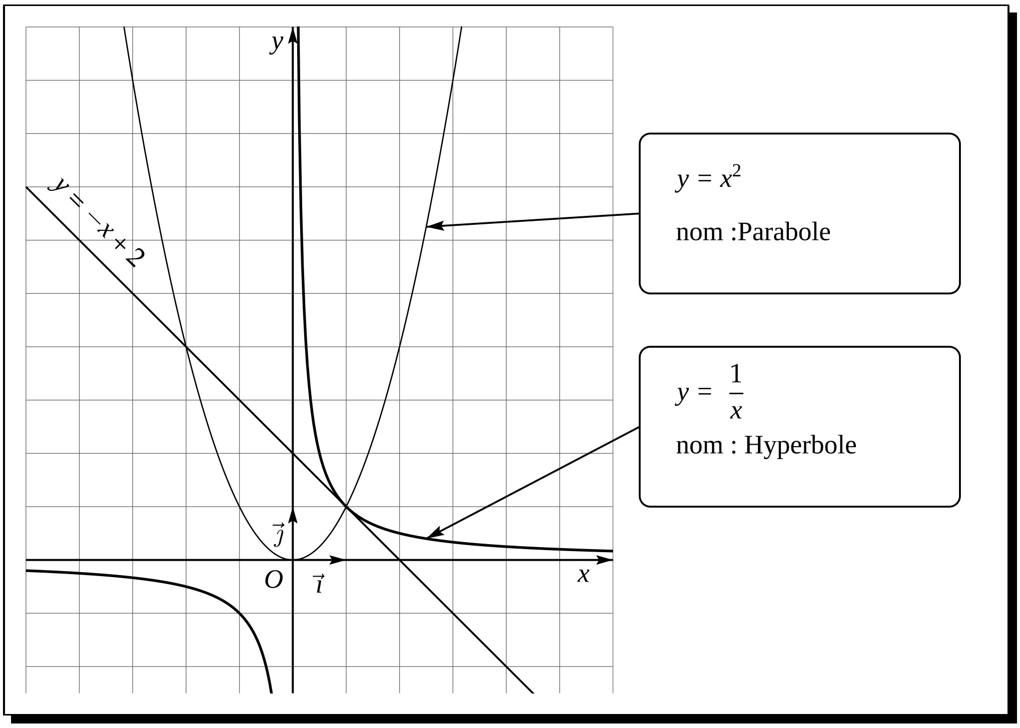
Un tableau de signes permet alors de conclure

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\boxed{f(x)\geqslant 2 \iff x\in[1;3]}$.

Exercice 3 : Fonctions de références, encadrements

1.



2. On lit sur le graphique :

$a)$ $\dfrac{1}{x} \leqslant x^2 \iff \boxed{x \in]-\infty;0[\cup[1;+\infty[}$ et $b)$ $x^2 \geqslant -x+2. \iff \boxed{x \in]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[}$

3. Il vient :

- si $-2 \leqslant x \leqslant 6$ alors $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 36}$
- si $-4 \leqslant x \leqslant -2$ alors $\boxed{-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{4}}$
- si $-1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $\boxed{-1 \leqslant -x+2 \leqslant 3}$
- si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\boxed{\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{-x+2} \leqslant 1}$

Exercice 4 : Données manquantes, calcul de médiane

1. Il vient

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+3y=123 \end{cases} \iff \begin{array}{l}(1)\\(2)-2\times(1)\end{array}\begin{cases} x+y=50 \\ y=23 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{(x,y)=(27,23)}$$

2. $a)$ Il y a deux inconnues a et b. Il nous faut donc trouver 2 équations, or nous avons 2 hypothèses :

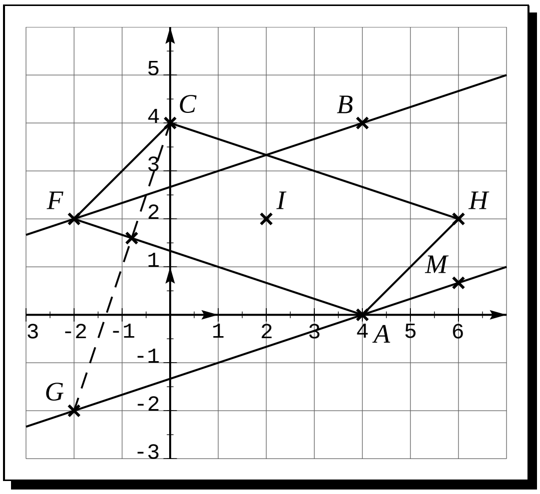
$$\begin{cases} \text{l'effectif est } 100 \\ \text{la moyenne est } 2,55 \end{cases} \iff \begin{cases} 5+19+a+b+17+9=100 \\ (0+19+2a+3b+68+45)/100=2,55 \end{cases} \iff \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases} a+b=50 \\ 2a+3b=123 \end{cases}$$

On retrouve le système de la question **1.**, ce qui permet de conclure : $\boxed{(a,b)=(27,23)}$

$b)$ La médiane est $\boxed{\text{Me}=2}$.

Exercice 5 : Petit problème de géométrie analytique

1.



2. *a*) Le quadrilatère $AFCH$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{FC}$. Posons $H(x, y)$. Il vient alors le calcul

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{FC} \iff \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-4=2 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H(6;2)}$$

b) Le point I est le milieu de la diagonale $[AC]$. D'où le calcul $I\left(\frac{4+0}{2}; \frac{0+4}{2}\right)$, soit $\boxed{I(2;2)}$.

3. *a*) Calculons un vecteur directeur de chacune des droites (AG) et (FB). On obtient

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ces 2 vecteurs étant égaux, il sont en particulier colinéaires, et donc $\boxed{\text{les droites } (AG) \text{ et } (BF) \text{ sont parallèles}}$.

b) Au vu de la question précédente, il est clair que M est un point de la droite (AG). Or cette droite est de coefficient directeur $-2/-6 = 1/3$ (d'après la question précédente) et elle passe par le point $A(4;0)$. On en déduit que son équation réduite est de la forme

$$y = \frac{1}{3}x + b \quad \text{avec} \quad 0 = \frac{1}{3} \times 4 + b \quad \text{d'où l'équation} \quad (AG)\ : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Notre point M étant le point d'abscisse 6 de cette droite, on a alors facilement $\boxed{M\left(6; 2/3\right)}$. **rque :** on aurait également pu utiliser la relation de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{FB}$.

4. L'équation réduite de (AF) est de la forme $y = ax + b$. Or

$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad a = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

De plus, A est sur cette droite, d'où

$$0 = -\frac{1}{3} \times 4 + b \quad \text{et} \quad b = \frac{4}{3}. \quad \text{Finalement, on obtient} \quad \boxed{(AF)\ : y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}$$

5. En procédant comme précédemment, on trouve $\boxed{(CG)\ : y = 3x + 4}$. Chercher l'intersection des droites (AF) et (CG) revient donc à résoudre le système

$$\begin{cases} y = 3x+4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x+4 \\ 3y = -x+4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x+4 \\ 3(3x+4) = -x+4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8/5 \\ x = -4/5 \end{cases}$$

d'où $\boxed{\text{le point d'intersection de } (AF) \text{ et } (CG) : \left(-\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)}$

6. Une parallèle à (AF) possède le même cefficient directeur que (AF). En utilisant ensuite les coordonnées du point C et en procédant de la même manière que précédemment, on trouve que l'équation réduite de la droite cherchée est $\boxed{y = -\frac{1}{3}x + 4}$.