Corrigé du devoir surveillé n° 12

Exercice 1 : Inéquation rationnelle

1. On remarque tout d'abord que cette équation n'a de sens que pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$. Il vient alors
$$\frac{x+4}{x+1} = \frac{4}{x} \iff x(x+4) = 4(x+1) \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0.$$
On a un produit de facteurs égale à zéro, donc l'un des facteurs est nul. D'où les $\boxed{\text{2 solutions : 2 et } -2}$.

2. Même remarque que précédemment, x doît être différent de 0 et -1. Il vient alors
$$\frac{x+4}{x+1} \leqslant \frac{4}{x} \iff \frac{x(x+4)}{x(x+1)} - \frac{4(x+1)}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff \frac{x^2-4}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} \leqslant 0$$
Un tableau de signes permet de conclure :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

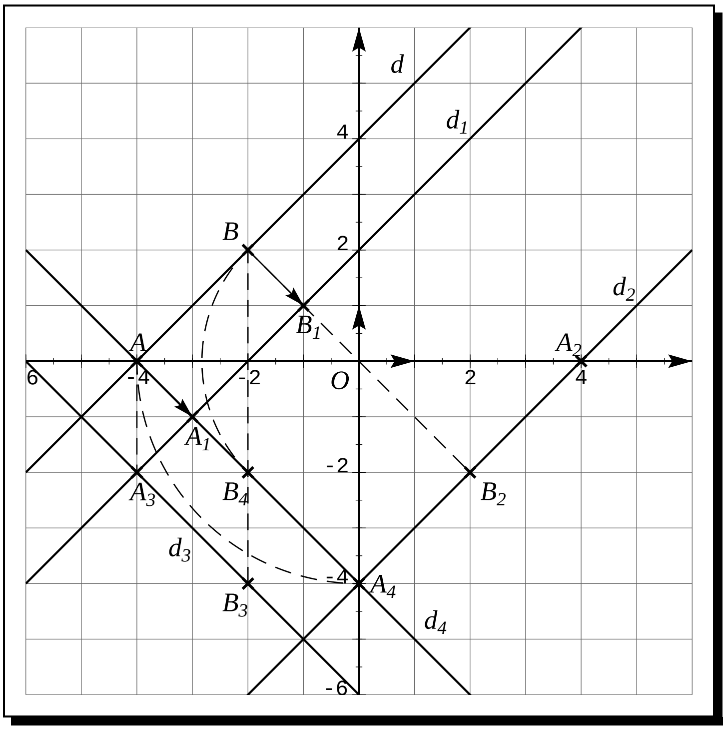
d'où la conclusion :
$$\frac{x+4}{x+1} \leqslant \frac{4}{x} \iff \boxed{x \in [-2;-1[\cup]0;2]}.$$

Exercice 2 : Inéquation et valeur absolue

L'inéquation proposée se lit « *la distance de x à -4 est inférieure ou égale à* 5 ». Un shéma permet de répondre immédiatement ; $\boxed{\mathcal{S} = [-9;1]}$.

Exercice 3 : Transformations usuelles

1. *a*)



b) Par définition de la translation, on a $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$. Ce qui donne :

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x_1+4 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1+4=1 \\ y_1=-1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A_1(-3;-1)}.$$

c) De la même façon, il vient

$$\overrightarrow{BB_1} = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x_1+2 \\ y_1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1+2=1 \\ y_1-2=-1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B_1(-1;1)}.$$

d) Cherchons l'équation réduite de d_1. Il vient

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc le coefficient directeur de } d_1 \text{ est } \frac{2}{2} = 1$$

donc l'équation de d_1 est de la forme $y = x + b_1$. En utilisant les coordonnées du point B_1, on trouve facilement $b_1 = 2$, d'où l'équation cherchée $\boxed{d_1\ : y = x+2}$.

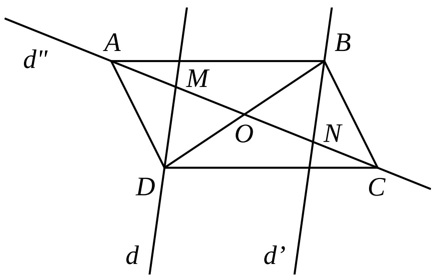
2. b) Cherchons les coordonnées du points A_2, image du point A par la symétrie s. Il vient

$$\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA} \iff \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A_2(4;0)}$$

Et comme l'on sait que d_2 est une droite parallèle à d, qui est elle-même parallèle à d_1, on en déduit que d_2 et d_1 ont le même coefficient directeur. En utilisant ensuite les coordonnées du point A_2, on trouve $\boxed{d_2\ : y = x-4}$.

3. b) On lit $\boxed{d_3\ : y = -x-6}$.

Exercice 4 : Démontrer avec une symétrie centrale



1. On remarque tout d'abord que $s(D) = B$ puisque O milieu de $[BD]$.

On sait que pour une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle à la droite d'origine. Or la droite d passe par le point D (par hypothèse), donc l'image de d passe par le point image de D, c'est à dire B.

Conclusion : $s(d)$ est une droite parallèle à d qui passe par B. Autrement dit $\boxed{s(d) = d'}$.

2. Il est clair que l'on a $s(A) = C$ et $s(C) = A$ (puisque O milieu de $[AC]$). Donc par s, l'image de la droite (AC) est elle-même, autrement dit $s(d'') = (d'')$ si l'on note d'' la droite (AC).

Le point M est l'intersection de d et de d'', donc le point $s(M)$ sera l'intersection de $s(d)$ et de $s(d'')$ (conservation du point d'intersection), autrement dit de d' et d'' (en vertu des questions précédentes). D'où $\boxed{s(M) = N}$, ce qui prouve que $\boxed{O \text{ est le milieu de } [MN]}$.
