Devoir surveillé n° 1

durée : 1h

Exercice 1 : (*10 points*) **Un petit problème avec la fonction** ln

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - 2y = -2\ln x$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad xy' - 2y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2} + \ln x$$

est une solution particulière de (E).

3. En déduire la solution générale de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de (E) prenant la valeur $1/4$ pour $x = 1$.

– Partie B – Étude de fonction –

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + \ln x + \frac{1}{2}.$$

On admettra que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

1. *a*) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

b) Étudier les variations de f.

(*Autrement dit : dérivée, signe de la dérivée, tableau de variations*. . .)

2. *a*) Montrer que dans l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera α.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut. (Justifier.)

3. Construire, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm, la portion de la courbe C_f représentative de la fonction f correspondant à x élément de $]0, 5]$.

4. *a*) Vérifier que la fonction H, définie sur $]0, +\infty[$ par

$$H(x) = x\ln x - x$$

est une primitive de la fonction ln.

b) Calculer, en cm^2, l'aire de la portion de plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation :

$$x = 3 \qquad \text{et} \qquad x = 5.$$

On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 2 : (*5 points*) **Second ordre, avec une exponentielle**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_0) \qquad y'' + 4y' + 3y = 0$$

2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme Ae^{-2x} où A est un réel que l'on déterminera.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

Exercice 3 : (*5 points*) **Méthode des moindres carrés : charge de rupture d'un acier**

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points (x_i, y_i). On prendra 1 cm (ou 1 grand carreau) en abscisse pour une unité, en représentant les abscisses à partir de la valeur 60. En ordonnée, on prendra 1 cm (ou 1 grand carreau) pour 2 kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.

2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage.

3. Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Interpréter le résultat.

4. *a*) Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera des valeurs approchées des coefficients a et b à 10^{-3} près.

b) Tracer la droite D sur le graphique.

5. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.