Devoir surveillé n^o 4

durée : 2h

Exercice 1 : (*12 points*) **Une équation différentielle d'ordre 2,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

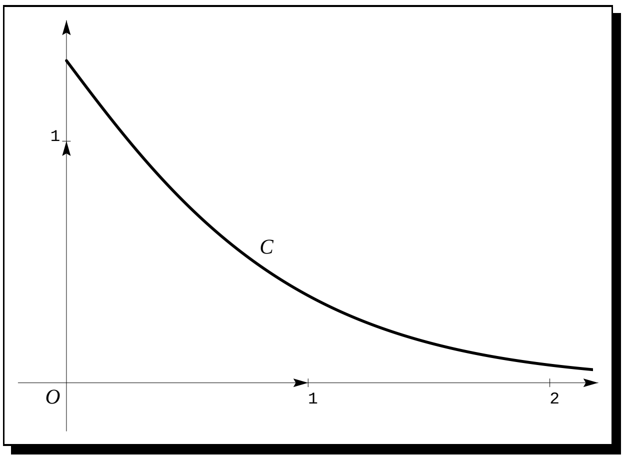
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

$$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$$



Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessus.

1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.

a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et t, pour x positif au voisinage de 0.

4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale ;

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$I = \int_0^t f(x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}.$$

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim_{t\to+\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question **4.***a*), et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des glaces !** bts mai**,** *1995*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir et emballer des cônes de glace.

– Partie A –

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de glace qu'il contient. On suppose que X suit la loi normale de paramètres $m = 100$ et σ.

1. Dans cette question, $\sigma = 2\sqrt{2}$.

On choisit au hasard un cône rempli de glace. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la masse qu'il contient soit comprise entre 95 g et 105 g.

2. Un cône est considéré comme « bon » lorsque la masse de glace qu'il contient appartient à l'intervalle $[95\,;105]$. Déterminer la valeur du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « *le cône est bon* » soit égale à $0,95$ (on donnera le résultat avec deux décimales).

– Partie B –

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,000\,5$.

On nomme Z la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans le lot.

1. Quelle est la loi suivie par Z ?

2. On admet que la loi de Z peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre de cette loi.

b) Si un client reçoit un lot contenant au moins 5 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de ce lot.

Calculer la probabilité qu'un lot soit inchangé.