def

Devoir surveillé n° 6

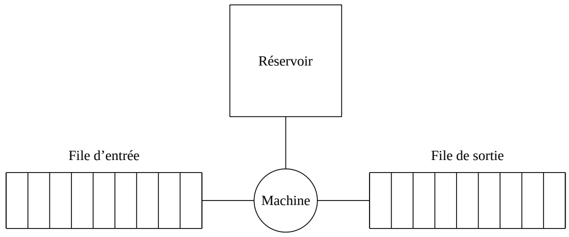
<u>durée</u> : 2h

Exercice : (*9 points*) **Une chaîne d'embouteillage,** *bts mai, mai 2003*

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides, selon le schéma ci-contre.

L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.



1. *Défaut d'approvisionnement*

On considère qu'il y a défaut d'approvisionnement :

– soit lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide,

– soit lorsque le réservoir est vide.

On tire au hasard un jour ouvrable dans une année. On note A l'événement : « *la file d'attente est vide au moins une fois dans la journée* » et B l'événement : « *le réservoir est vide au moins une fois dans la journée* ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants et une étude statistique a montré que

$$p(A) = 0,04 \qquad \text{et} \qquad p(B) = 0,02.$$

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) $E_1 = A \cap B$.

b) E_2 : « *la machine a connu au moins un défaut d'approvisionnement dans la journée* ».

2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*

On note X la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirée au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de pannes de la machine. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$.

Déterminer, à l'aide de la table du formulaire :

a) $p(X \leqslant 2)$;

b) la probabilité de l'événement « *la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs* »;

c) le plus petit entier n tel que : $p(X \leqslant n) \geqslant 0,99$.

Dans tout ce qui suit, les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

3. *Qualité de l'embouteillage à la sortie*

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production d'une heure, associe le volume d'eau qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, Y suit la loi normale de moyenne $1,5$ et d'écart-type $0,01$.

Une bouteille d'eau est conforme aux normes de l'entreprise lorsqu'elle contient entre $1,47$ et $1,53$ litre d'eau.

Calculer la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.

4. *Fiabilité d'une machine à embouteiller*

On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, asssocie sa durée de vie avant une défaillance.

On note $p(T > t)$ la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.

On suppose que $p(T > t) = e^{-0,005t}$.

a) Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

b) Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à $0,8$. Arrondir à l'entier par défaut.

Exercice : (*11 points*) **Équation différentielle,** *bts mai, mai 2003*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

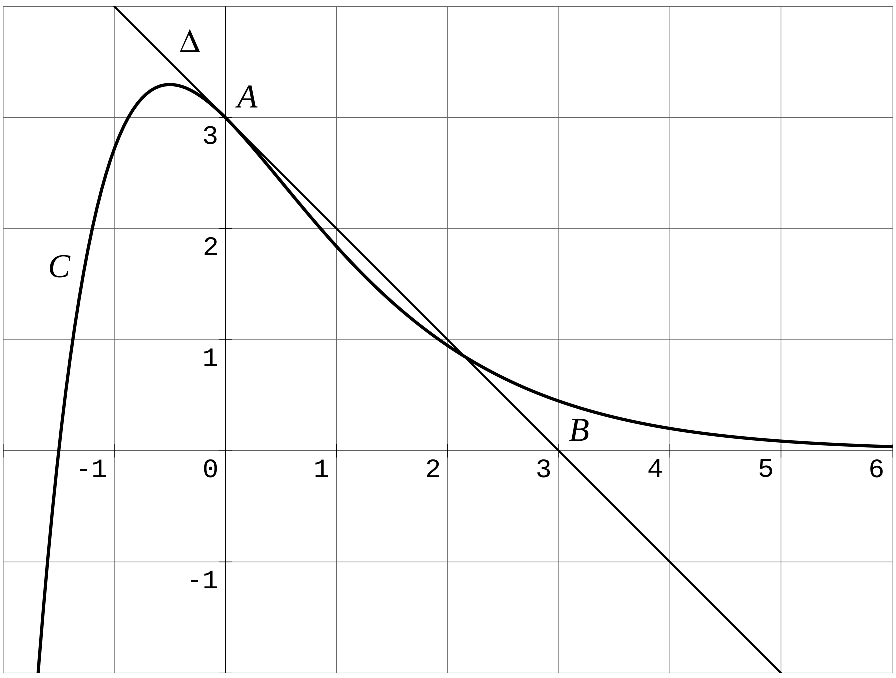
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0,3)$.

– Partie B - Étude d'une fonction –

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3,0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.

b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 3)e^{-x}.$$

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$;

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (On ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.)

3. *a*) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

– Partie C - Calcul intégral –

1. La fonction f définie dans la partie **B** est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}.$$

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que $I = 5 - 6e^{-1/2}$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$.

a) Démontrer que $J = 65/48$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c) Vérifier que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.