BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Sujets d'examen

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2003/2004

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1991

Exercice 1 : (*12 points*) **Le parachute,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels**,** *1991*

La trajectoire suivie par un objet relié à un parachute est un axe vertical noté $(O,\vec{\imath})$.

À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t)\vec{\imath}$ où v est une fonction de la variable réelle positive t.

Dans ces conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle

$$mv'(t) + kv(t) = mg \qquad (1)$$

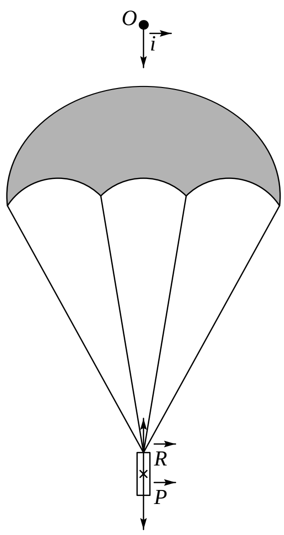
où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. *a*) Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (1);

   b) Montrer que les fonctions solutions de (1) sont définies pour tout nombre réel positif t par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

   où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.



2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8$ kg, $g = 10$ ms^{-2} et $k = 25$ unités SI.

   a) Donner la fonction particulière v_1 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = v_0$ de 5 ms^{-1}.

   b) Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.

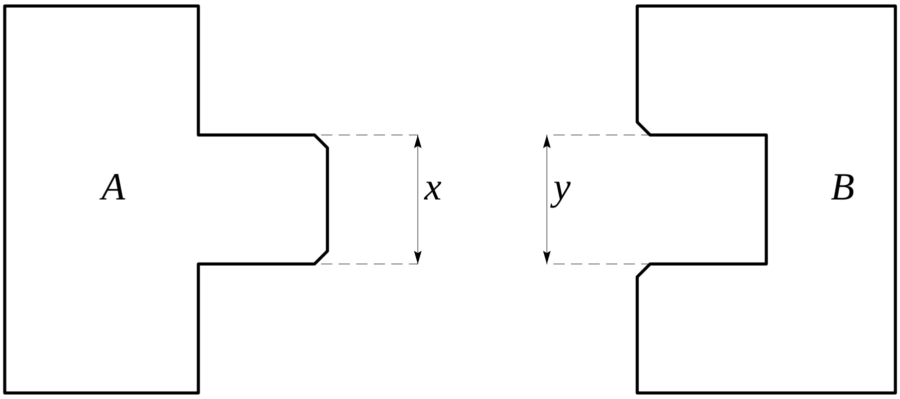
   c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

   d) Donner la solution particulière v_3 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = w_0$ de 3, 2 ms^{-1}.

   e) Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où l'unité graphique est de 4 cm sur l'axe Ox, et 2 cm sur l'axe Oy.

Exercice 2 : (*8 points*) **Ajustements et probabilités,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels**,** *1991*

Une usine produit des pièces de type A qui doivent s'ajuster dans des pièces de type B.



1. Les différentes valeurs prises par la cote x permettent de définir une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 20, d'écart-type $0,04$.

a) Déterminer la probabilité pour qu'une pièce de type A soit acceptable sachant que sa cote x doit être comprise dans l'intervalle $[19,92\,;20,08]$.

b) On suppose maintenant que la proportion de pièces défectueuses de type A réalisées est $0,05$. On prélève des échantillons de 100 pièces. Soit T la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pièces défectueuses d'un échantillon.

• Quelle est la loi de probabilité de T ? On admettra qu'on peut l'assimiler à une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.

• Déterminer la probabilité de l'événement : $\left[T < 4\right]$

2. Les différentes valeurs prises par la cote y permettent de définir une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne $20,1$ et d'écart-type $0,03$. On suppose d'autre part que les pièces de type A et B peuvent s'assembler si le jeu entre les cotes, $y-x$, est au moins égal à $0,01$.

On rappelle que si X et Y sont des varables aléatoires suivant des lois normales de moyennes m_x et m_y, de variances V_x et V_y, alors $Y-X$ suit une loi normale de moyenne $m_y - m_x$ et de variance $V_x + V_y$.

a) Déterminer la moyenne et l'écart-type de la variable $Y-X$.

b) Quelle est la probabilité qu'une pièce de type A prise au hasard puisse être introduite dans une pièce de type B également prise au hasard ?

Brevet de Technicien Supérieur
Session 1992

Exercice 1 : Décharge d'un condensateur, *bts mai, session 1992*

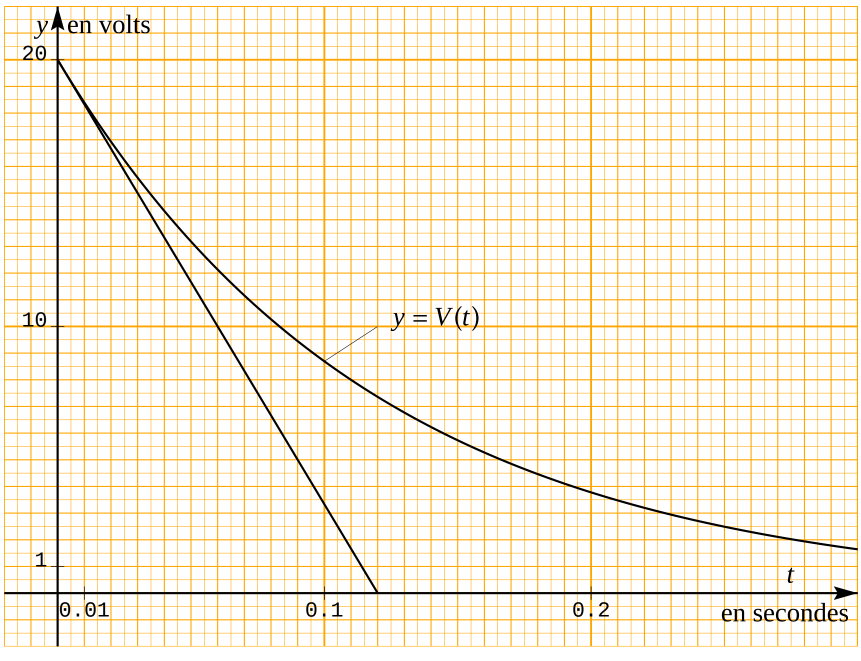
(Les unités de mesure utilisées sont les unités du système SI.)

Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R; on note $a = RC$. La tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0;+\infty[$.

V est solution de l'équation différentielle (E) :

$$\mathcal{V}' + \frac{1}{a}\mathcal{V}(t) = 0.$$

1. *a*) Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).
   b) On rappelle que pour $t = 0$, on a $V(0) = 20$. Déterminer l'expression de V.
2. Dans cette question, on suppose que $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$.
   a) Montrer que l'on a alors $V(t) = 10e^{-10t}$.
   b) Étudier les variations de la fonction V.
   c) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles on a $V(t) \geqslant 0,02$.
   d) L'intensité traversant le circuit est une fonction I du temps; on a $I(t) = CV'(t)$. Déterminer $I(t)$.
   e) Calculer l'énergie W dissipée dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = 0,69$ sachant que
   $$W = \int_0^{0,69} RI^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Dans cette question, la tension aux bornes du condensateur étant définie par
   $$V(t) = 20e^{-t/a},$$
   on note C_a la courbe représwentative de V dans un repère orthogonal avec les unités traphiques suivantes :
   5 cm sur l'axe des abscisses pour représenter 0, 1 seconde;
   0, 5 cm sur l'axe des ordonnées pour représenter 1 volt.
   a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_a au point d'abscisse 0.
   Soit M le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de M.
   b) Pour un certain dipole on a tracé la courbe représentative C_a ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur le graphique suivant :



   Déduire de ce graphique la valeur correspondante de a.

Exercice 2 : Granulométrie, *bts mai, session 1992*

Le but de cet exercice est d'étudier une méthode de granulométrie fréquemment utilisée dans l'industrie sucrière pour calibrer le sucre blanc en foncion de la taille de ses cristaux.

– Partie A –

Pour effectuer un calibrage il faut que le sucre soit bien sec, or dans 5% des cas celui-ci est trop humide et l'opération ne peut être effectuée. On fait dix calibrages successifs.

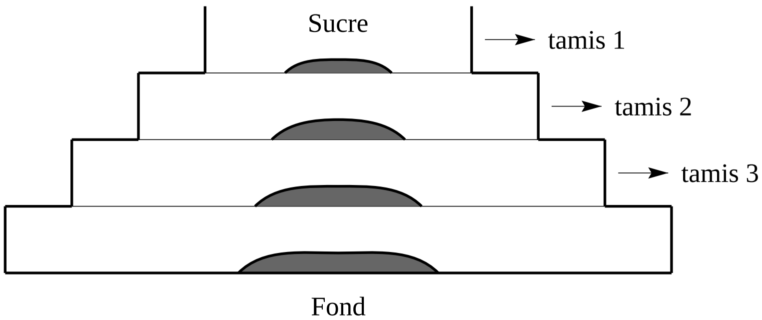
a) Quelle est la probabilité pour que tous les calibrages puissent être effectués ?

b) Quelle est la probabilité pour que deux calibrages au plus ne puissent être faits à cause de l'humidité du sucre ?

– Partie B –

Le sucre est bien sec.

Le calibrage consiste alors à faire passer le sucre au travers d'une série de tamis emboîtés les uns sur les autres et posés sur un fond.



On admettra que la variable aléatoire X prenant pour valeur la taille des cristaux de sucre suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
Dans le cadre de cet exercice on supposera qu'on dispose de 3 tamis dont voici les ouvertures de mailles en mm :

Tamis n°1 : ouverture $0,8$ mm;
Tamis n°2 : ouverture $0,5$ mm;
Tamis n°3 : ouverture $0,2$ mm.

Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à $0,2$ mm se retrouvent dans le fond à la fin du calibrage.

1. Compléter le tableau suivant :

Niveau de récupération	Taille des cristaux de sucre récupérés
Tamis n°1	$0,8 \leqslant X$
Tamis n°2	$\ldots \leqslant X < \ldots$
Tamis n°3	$\ldots \leqslant X < \ldots$
Fond	$X < 0,2$

2. On verse 1 800 g de sucre dont la taille des cristaux X suit la loi normale de moyenne $m = 0,58$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,2$ mm.

a) Calculer la probabilité de l'événement : $[X < 0,2]$ et la probabilité de l'événement $[0,5 \leqslant X < 0,8]$.

b) Estimer la masse de sucre récupéré d'une part dans le fond et d'autre part dans le tamis n°2.

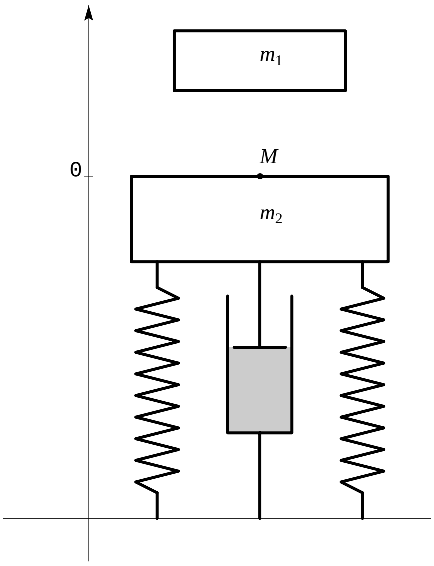
3. On constate maintenant que $m = 0,65$ mm etque 40% de la quantité de sucre initialement versé se retrouve dans le tamis n°2. Quelle est alors la valeurs de l'écart-type σ de la variable aléatoire X ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1993

Exercice 1 : (*12 points*) **Amortissement d'une enclume,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1993*

Pour éviter les perturbations crées par les vibrations lors du choc d'un marteau sur une enclume, on munit l'enclume de deux ressorts et d'un amortisseur selon le schéma ci-dessous :



masse du marteau : $m_1 = 1 \times 10^3$ kg
masse de l'enclume : $m_2 = 14 \times 10^3$ kg
constante de raideur d'un ressort : $k = 183 \times 10^4$ Nm^{-1}
constante de l'amortisseur : $\mu = 2,4 \times 10^4$ u SI

On suppose qu'après le choc, les deux parties (marteau-enclume) restent solidaires. La cote du point M à l'instant t est repérée par $z(t)$ mesurée sur l'axe indiqué sur le schéma. On choisit l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'ensemble marteau-enclume arrive au point le plus bas de la première oscillation.

1. La cote $z(t)$ (mesurée en mètres) est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 2kz = 0.$$

Soit

$$(E) \qquad 15z'' + 24z' + 3\,660z = 0.$$

a) Donner la solution générale de (E) sous la forme :

$$z(t) = e^{-\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

en déterminant les valeurs de α et β.

b) Les mesures initiales pour $t = 0$ sont

$$z(0) = -50,7 \times 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad z'(0) = 0.$$

Exprimer alors la solution de (E) qui vérifie ces deux conditions en déterminant A et B.

2. La position à l'instant t est maintenant donnée par

$$z(t) = -(50,7\cos(15,6t) + 2,6\sin(15,6t)) \times 10^{-3} \times e^{-0,8t}.$$

a) Déterminer, dans l'intervalle $[0, 1]$ à 10^{-2} près chacun, les instants t pour lesquels $z(t) = 0$.

(*On rappelle que les solutions de l'équation* $\tan x = \tan a$ *sont de la forme* $x = a + n\pi$, *n étant un entier.*)

b) Calculer $\tan(15,6t)$ lorsque $z(t)$ est extrêmal, c'est à dire quand $z'(t) = 0$. En déduire, dans l'intervalle $[0, 1]$, les valeurs approchées correspondantes de t à 10^{-2} près.

c) Tracer, sur une feuille millimétrée, la courbe représentative de z en fonction de t lorsque t varie dans $[0, 1]$.

(Sur l'axe des abscisses, gradué de 0 à 1, 20 cm représenteront une seconde.)

Nota : Le texte ci-dessus correspond au texte d'examen. Ici, vous pouvez prendre une feuille non millimétrée (petits carreaux ou grand carreaux), et les étudiants ayant des feuilles à grands carreaux peuvent prendre comme unité 20 grands carreaux pour une seconde.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des paquets de farine,** *bts MAI, 1993*

Une machine est chargée de conditionner des paquets de farine. La masse M d'un paquet est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'écart-type constant $\sigma = 30$, et dont la moyenne m peut-être modifiée. Un paquet est refusé si sa masse est inférieure à 995 grammes.

1. On suppose que la moyenne m est égale à $1\,000$.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un paquet soit refusé ?

b) On suppose que la probabilité pour qu'un paquet soit refusé est $p = 0,07$. On dispose de 100 paquets. Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de paquets à rejeter.

Quelle est la loi de X ? Calculer $p(X = 3)$.

On assimile la loi de X à une loi de Poisson. Indiquer le paramètre de cette loi de Poisson et déterminer la valeur indiquée pour $p(X \leqslant 5)$.

2. Afin de diminiuer le nombre de paquets refusés, on décide de modifier le réglage de la machine.

a) Quelle doit être la valeur de m pour que la probabilité d'accepter un paquet soit égale à $0,99$?

b) La machine est réglée de telle sorte que $m = 1\,025$. Afin de vérifier ce réglage, on prélève un échantillon de 20 paquets et on déterminer la masse moyenne $\overline{x}$.

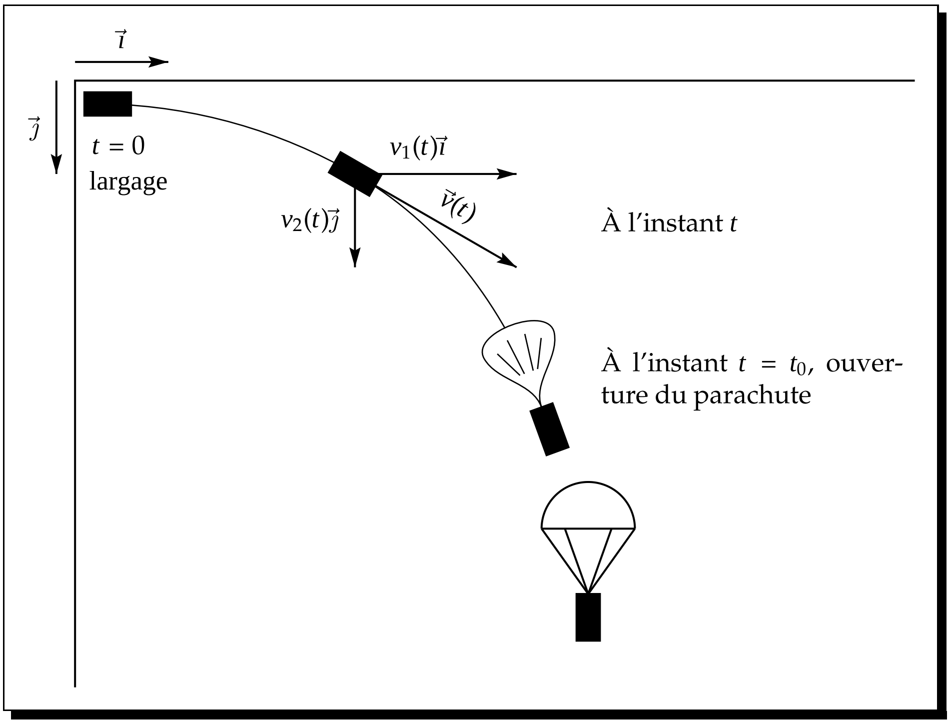
Déterminer l'intervalle centré en m contenant $\overline{x}$ avec une probabilité de $0,95$.

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1994

Exercice 1 : (*10 points*) **Largage d'un container,** *bts mai, session 1994*

On lance un container à partir d'un avion. On cherche à déterminer l'instant où la norme de la vitesse est minimale pour pouvoir déclencher l'ouverture du parachute. L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre. Le centre de gravité G est repéré para rapport au repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'axe $(O, \vec{\jmath})$ est dirigé vers le sol. À chaque instant t, le point G admet un vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de coordonnées $v_1(t)$ et $v_2(t)$ où v_1 et v_2 sont des fonctions du temps définies sur $[0\,;+\infty[$.



Sachant que le container est soumis à son poids et à la résistance de l'air, on établit que :

• la fonction v_1 vérifie l'équation différentielle

$$v' + 0,2v = 0$$

• la fonction v_2 vérifie l'équation différentielle

$$v' + 0,2v = 9,8.$$

1. *a*) Résoudre l'équation différentielle

$$v' + 0,2v = 0.$$

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_1(0) = 100$, déterminer $v_1(t)$.

2. *a*) Résoudre l'équation différentielle

$$v' + 0,2v = 9,8.$$

b) Sachant de plus que pour $t = 0$, on a $v_2(0) = 0$, déterminer $v_2(t)$.

3. *a*) Sachant que la norme du vecteur $\vec{v}(t)$, notée $||\vec{v}(t)||$, vérifie

$$||\vec{v}(t)||^2 = (v_1(t))^2 + (v_2(t))^2,$$

démontrer que l'on a :

$$||\vec{v}(t)||^2 = 12\,401e^{-0,4t} - 4\,802e^{-0,2t} + 2\,401.$$

Afin de simplifier les calculs, on remplace l'étude de $||\vec{v}(t)||^2$ par celle de $f(t)$ où la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = 12\,400e^{-0,4t} - 4\,800e^{-0,2t} + 2\,400 = 400\left(31e^{-0,4t} - 12e^{-0,2t} + 6\right).$$

b) Calculer $f(0)$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(t)$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

d) En déduire les variations de la fonction qui à $t \in [0; +\infty[$, associe $h(t) = \sqrt{f(t)}$.

e) Tracer dans un repère orthogonal (1 cm en abscisse représente 1 seconde, 1 cm en ordonnée représente 10 mètres par seconde) a courbe représentative de h.

f) En déduire à 10^{-2} près par défaut l'instant t_0 pour lequel $h(t)$ est minimum.

Déterminer alors ce minimum à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 2 : (*10 points*) **Coupes de plaques d'acier,** *bts mai, session 1994*

Dans un atelier, une machine A permet de couper des plaques d'acier dont la longueur permet de définir une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $M = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$ (les longueurs étant exprimées en cm).

1. *a*) Quelle est, à 10^{-2} près par défaut, la probabilité qu'une plaque ait une longueur extérieure à l'intervalle $[98; 102]$?

b) Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre a tel que 90% des plaques aient une longueur dans l'intervalle $[100 - a; 100 + a]$.

2. On supppose maintenant que 3% des plaques coupées par la machine A sont rejetées parce que leur longueur ne convient pas. Dans un lot contenant un grand nombre de plaques, on en prélève N. X est la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe le nombre de plaques dont la longueur est incorrecte.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) On suppose $N = 5$. Calculer $p(X = 2)$.

c) On suppose $N = 100$. Quel est le paramètre de la loi de Poisson par laquelle on peut approcher la loi de X ?

Donner alors une valeur approchée à 10^{-2} près de $p(X = 8)$, de $p(X > 2)$.

3. La machine A coupe 500 plaques par jour, dont 3% sont rejetées. On lui adjoint une machine B, et 9% des plaques coupées par cette machine B sont rejetées.

a) La machine B coupe 1 000 plaques par jour.

Quelle est alors la probabilité pour qu'une plaque coupée dans l'atelier soit rejetée ?

b) On veut que la probabilité de rejet d'une plaque reste inférieur à , 05. Quel nombre maximum de plaques peut-on couper avec la machine B, sachant que A coupe 500 plaques par jour ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1995

Exercice 1 : (*8 points*) **Des glaces !** bts mai**,** *1995*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir et emballer des cônes de glace.

– Partie A –

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de glace qu'il contient. On suppose que X suit la loi normale de paramètres $m = 100$ et σ.

1. Dans cette question, $\sigma = 2\sqrt{2}$.

On choisit au hasard un cône rempli de glace. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la masse qu'il contient soit comprise entre 95 g et 105 g.

2. Un cône est considéré comme « bon » lorsque la masse de glace qu'il contient appartient à l'intervalle $[95\,;105]$. Déterminer la valeur du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « *le cône est bon* » soit égale à $0,95$ (on donnera le résultat avec deux décimales).

– Partie B –

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,000\,5$.

On nomme Z la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans le lot.

1. Quelle est la loi suivie par Z ?

2. On admet que la loi de Z peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre de cette loi.

b) Si un client reçoit un lot contenant au moins 5 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de ce lot.

Calculer la probabilité qu'un lot soit inchangé.

Exercice 2 : (*12 points*) **Étude d'un système de sécurité,** *bts mai***,** *1995*

Principe du fonctionnement (voir schémas ci-dessous).

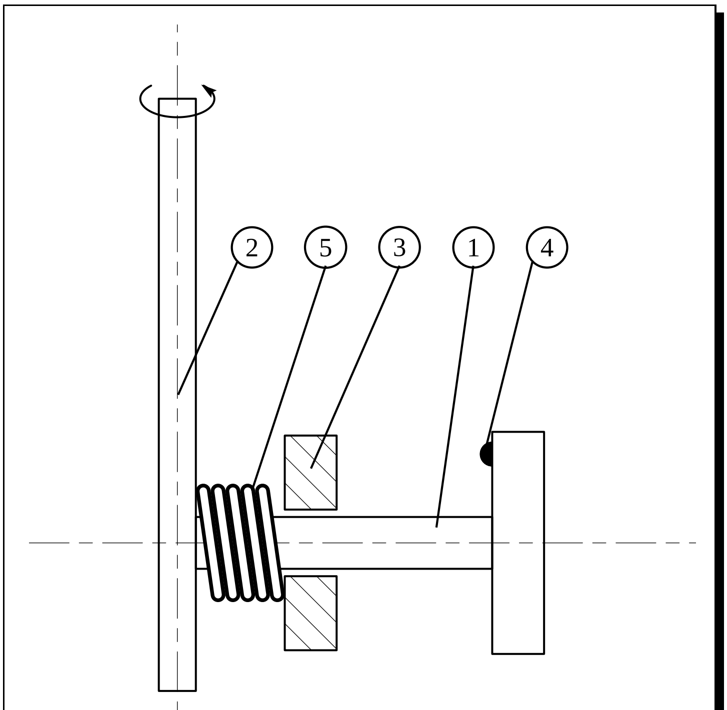


Schéma A

Une tige horizontale (1) de longueur ℓ est solidarisée perpendiculairement à un arbre (2) d'une machine tournant à une vitesse angulaire constante ω. Un ressort (5) de constante de raideur k est fixé par l'une de ses extrémités à l'arbre et par l'autre à un solide (3) de masse M, qui peut coulisser sans frottement sur la tige. Si le solide arrive en butée, il actionne un capteur (4) qui déclenche l'arrêt de la machine (voir schéma A).

Le but de l'exercice est de déterminer le mouvement du point P (voir schéma B).

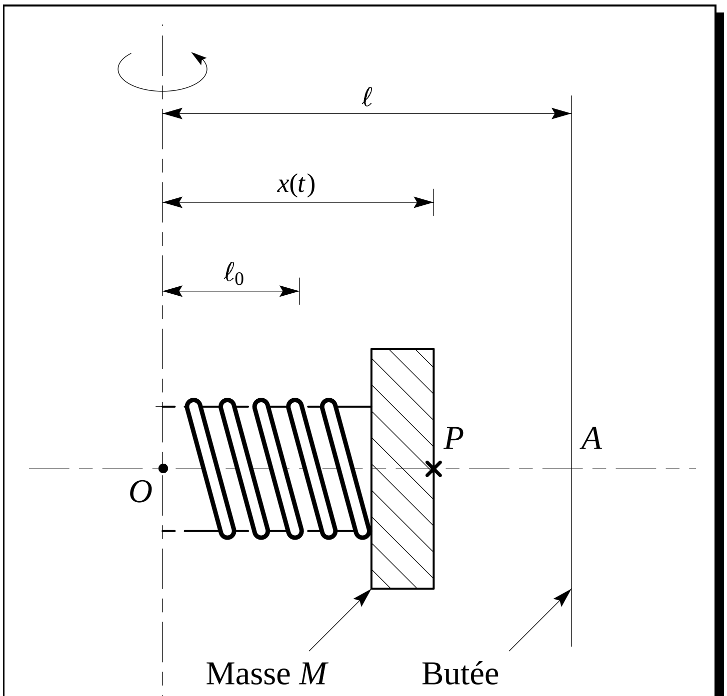


Schéma B

Pour cela, on munit la droite (OA) d'un repère $(O, \vec{\imath})$ où $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{\imath}$ (unité : le mètre).

L'unité de temps étant la seconde, la position du point P à l'instant t est alors repérée par son abscisse $x(t)$ dans le repère précédent et l'on a, à tout instant t :

(1) $$\ell_0 \leqslant x \leqslant \ell$$

(2) $$x''(t) + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right)x(t) = \frac{k}{M}\ell_0 \qquad \text{qui s'écrit :} \qquad x'' + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right)x = \frac{k}{M}\ell_0$$

Les contraintes techniques fixent pour tout le problème

$$M = 0,062\,5\,\text{kg} \qquad k = 169\,\text{N.m}^{-1} \qquad \ell_0 = 0,072\text{m} \qquad \ell = 0,12\text{m}$$

D'autre part, pour simplifier l'étude, les conditions initiales sont fixées à $t = 0$: $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$.

Question préliminaire :

Vérifier que l'équation différentielle (2) s'écrit :

(E) $$x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 194,688.$$

1. On considère dans cette question que $\omega = 20\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution de (E). En déduire la forme générale des solutions de (E) puis la solution particulière vérifiant les conditions initiales données.

c) La position du point P est donnée par :

$$x(t) = -0,012\,5\cos(48t) + 0,084\,5.$$

Le point P atteint-il la butée ?

2. On considère maintenant que $\omega = 110,5\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) En adoptant la même démarche qu'à la question **1.**, montrer que la forme générale des solutions de l'équation (E) est :

$$C_1e^{97,5t} + C_2e^{-97,5t} - 0,020\,48$$

puis déterminer la solution particulière x vérifiant les conditions initiales données.

b) Calculer $x(0,01)$ et $x(0,02)$. Interpréter le résultat.

3. On considère enfin que $\omega = 52\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales données.

b) À quel instant le point P atteint-il la butée ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1996

Exercice 1 : (*10 points*) **La machine à bouchons,** bts mai**,** *1996*

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,025$ mm.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21,95; 22,05]$.

Les trois questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Quelle est la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable ?
2. Dans cette question, on considère que la probabilité qu'un bouchon soit défectueux est $q = 0,05$.

   On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme Y la variable aléatoire mesurant le nombre de bouchons défectueux d'un tel échantillon.

   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Déterminer l'espérance mathématique de la variable Y.

   b) On approche Y par une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la valeur du paramètre λ ?

   Calculer la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 10 bouchons défectueux.
3. En vue du contrôle de réglage de la machine, on prélève régulièrement dans la production des échantillons de 100 bouchons.

   On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 bouchons, associe le diamètre moyen des bouchons de cet échantillon.

   Lorsque la machine est bien réglée, $\overline{X}$ suit la loi normale de paramètres m et $\sigma' = \sigma/10$ (on rappelle que $m = 22$ et $\sigma = 0,025$).

   a) Déterminer le réel a tel que $P(22 - a \leqslant \overline{X} \leqslant 22 + a) = 0,95$.

   b) Sur un échantillon de 100 bouchons, on a les résultats suivants (les mesures des diamètres étant réparties en classe d'amplitude 0,02 mm) :

Classes de diamètres	effectif correspondant
$[21,93; 21,95[$	3
$[21,95; 21,97[$	7
$[21,97; 21,99[$	27
$[21,99; 22,01[$	30
$[22,01; 22,03[$	24
$[22,03; 22,05[$	7
$[22,05; 22,07[$	2

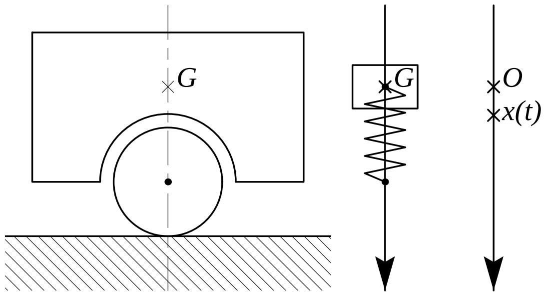
En supposant que tous les bouchons d'une classe ont pour diamètre la valeur centrale de cette classe, donner la moyenne et l'écart-type de cette série (aucune justification demandée; résultats arrondis à l'ordre 10^{-4}).

En utilisant la question précédente, peut-on accepter au seuil de risque 5%, l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée ?

Exercice 2 : (*10 points*) **Suspension de remorque,** bts mai**,** *1996*

L'objet de cet exercice est l'étude de la suspension d'une remorque dans les deux cas suivants : système sans amortisseur puis avec amortisseurs.

Le centre d'inertie G d'une remorque se déplace sur un axe vertical$(O,\vec{\imath})$ dirigé vers le bas (unité : le mètre); il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M ($M > 0$) reposant sur un ressort fixé à l'axe des roues.



Le point O est la position d'équilibre occupée par G lorsque la remorque est vide.

La remorque étant chargée d'une masse, on enlève cette masse et G se met alors en mouvement. On considère que $t = 0$ au premier passage de G en O.

– Partie A – Mouvement non amorti –

L'abscisse $x(t)$ de G est alors, à tout instant t, solution de l'équation $Mx''(t) + kx(t) = 0$ où k désigne la raideur du ressort, ce qui peut encore s'écrire :

$$Mx'' + kx = 0. \tag{1}$$

On prend : $M = 250$ kg et $k = 6\,250$ N.m^{-1}.

Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0,10$ m.s^{-1}.

Préciser la période de cette solution particulière.

– Partie B – Mouvement amorti –

On équipe la remorque d'amortisseurs de constante d'amortissement λ. L'abscisse $x(t)$ du point G vérifie alors à tout instant t l'équation $Mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0$, ce qui peut encore s'écrire

$$Mx'' + \lambda x' + kx = 0. \tag{2}$$

On prend : $M = 250$ kg, $k = 6\,250$ N.m^{-1} et $\lambda = 1\,500$ N.s.m^{-1}.

1. *a*) Déterminer dans ces conditions la solution générale de l'équation différentielle (2).

b) Sachant que $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0,08$ m.s^{-1}, déterminer la solution particulière de l'équation (2) définissant le mouvement de G.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = -0,02e^{-3t}\sin(4t)$.

a) Déterminer les valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$ pour lesquelles $f(t) = 0$.

b) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

c) On admet que, pour $a \neq 0$, les équations

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha = -\frac{b}{a} \quad \text{(d'inconnue } \alpha)$$

ont les mêmes solutions.

Déterminer des valeurs approchée à 10^{-2} près des nombres réels t appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$ et annulant $f'(t)$. Pour chaque valeur ainsi obtenue, préciser la valeur correspondante de $f(t)$.

d) Déduire des questions précédentes l'allure de la courbe C_f, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. On prendra 10 cm (ou 10 grands carreaux) pour unité en abscisse, et 1 cm (ou 1 grand carreau) pour 0,002 unité en ordonnée.

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1996

Exercice 1 : (*8 points*) **Calcul d'un moment d'inertie,** *Bts maintenance industrielle*, 1996

Les parties **I** *et* **II** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

– Partie I - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+t^2)x' + 2tx = 0$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), vérifiant $f(0) = 1$.

– Partie II - Calcul intégral –

On pose

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{et} \qquad C = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt,$$

1. *a*) Montrer que $A = \dfrac{\pi}{4}$.

   b) Montrer que $B = \dfrac{1}{2}\ln 2$.
2. *a*) Vérifier que, pour tout nombre réel t, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

   b) Déduire du **1.** la valeur exacte de C.

– Partie III - Application –

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = 1$ est donné par

$$M = \int_0^1 (1-t)^2 f(t)\,dt.$$

1. Montrer que $M = A - 2B + C$.
2. À l'aide de la partie **II**, calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de M. (Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.)

Exercice 2 : (*12 points*) **Statistiques inférentielles : un problème de synthèse.** *Bts Maintenance industrielle, 1996*

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

– Partie I –

La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1. Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 10^{-4} près la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.

2. On admet que $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.

a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.

b) Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : « *il y a au plus trois moteurs non commercialisables* ».

– Partie II –

La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée de vie	$[300, 340[$	$[340, 380[$	$[380, 420[$	$[420, 460[$	$[460, 500[$
Effectifs	7	21	48	16	8

1. En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406,8$ et $\sigma_2 = 40,5$.

2. On désigne par $\overline{X_1}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne, et par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ suivent des lois normales de moyennes respectives M_1, M_2, $M_1 - M_2$ inconnues, et on estime l'écart type de D par

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}.$$

(On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39, 4.)

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternative $H_1 : M_1 \neq M_2$.

a) Sous l'hypothèse H_0, D suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle $[-h, h]$ tel que $P(-h \leqslant D \leqslant h) = 0,95$.

b) Énoncer la règle de décision du test.

c) Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1997

Exercice 1 : (*12 points*) **Équation différentielle d'ordre 2,** *bts mai, session 1997*

– Partie A - résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

(E) $$y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}.$$

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation (E ') :

   (E') $$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de l'équation (E).
3. *a*) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

   b) Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0; 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

– Partie B - Étude d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^{2x}(1 - 2x).$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; unité graphique : 2 cm.

1. *a*) Étudier la limite de f en $-\infty$

   b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

   En déduire que C admet une asymptote (que l'on précisera). Préciser la position de C par rapport à cette asymptote.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe C.
4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. Donner la valeur de cette aire arrondie au mm^2.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des pièces en série**. . . , *bts mai, session 1997*

Une entreprise fabrique en série des pièces dont le diamètre, mesuré en millimètres, définit une variable aléatoire D.

On admet que cette variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

1. *Estimation de m et σ :*

   a) Un échantillon de 100 pièces est prélevé au hasard dans la production. Les mesures des diamètres des pièces de cet échantillon son regroupées dans le tableau suivant :

Mesures des diamètres (en mm)	$[4,0; 4,2[$	$[4,2; 4,4[$	$[4,4; 4,6[$	$[4,6; 4,8[$	$[4,8; 5,0[$
effectif	6	24	41	25	4

   En faisant l'hypothèse que, pour chaque classe, les valeurs mesurées sont égales à celle du centre de la classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne d et l'écart type s de cet échantillon.

   En déduire l'estimation ponctuelle de σ fournie par cet échantillon.

   b) On appelle $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de l'échantillon.

   On rappelle que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma/10$.

   Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de D au seuil de confiance de 95%.
2. Dans cette question, on admet que la production comporte 5 % de pièces inutilisables.

   a) L'entreprise conditionne ses pièces par boîtes de 25.

   On tire une boîte au hasard (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 25 pièces dans la production).

On désigne par K le nombre de pièces inutilisables dans cette boîte.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire K ?

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que cette boîte contienne au plus une pièce inutilisable.

b) Un client qui a besoin de 185 pièces commande 8 boîtes de pièces (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise de 200 pièces dans la production).

On désigne par L le nombre de pièces inutilisables dans cette commande. On admet que L suit la loi de Poisson de paramètre 10.

Quelle est la probabilité que le client dispose d'un échantillon suffisant de pièces utilisables dans sa commande ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1998

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*11 points*) **Une usine de plaquettes,** bts mai**,** *1998*

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-2} **près.**

Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesurées en mm.

– Partie A –

Sur un échantillon de 100 plaquettes, on a mesuré la longueur de chaque plaquette et obtenu le tableau suivant :

Longueur	$[35, 37[$	$[37, 39[$	$[39, 41[$	$[41, 43[$	$[43, 45[$
effectif	3	25	50	20	2

1. On veut calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de l'échantillon. Pour cela, on fait comme si toutes les observations d'une classe étaient situées au centre de la classe. Calculer m et s. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par l'approximation précédente, les résultats seront donnés à 10^{-1} près.
2. On suppose que la variable aléatoire L qui à chaque plaquette associe sa longueur suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $1,6$.
   a) Donner une estimation ponctuelle de μ.
   b) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de μ centré sur la valeur obtenue précédemment.

– Partie B –

On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type $1,6$ et que la largeur ℓ suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type $1,2$.

1. On tire une plaquette au hasard dans la production.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 et 43 mm ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une largeur comprise entre 22 et 28 mm ?
2. Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 et 43 mm et sa largeur est comprise entre 22 et 28 mm.

   En admettant que L et ℓ sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée ?

– Partie C –

La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit rejetée est égale à $0,07$.

On appelle X la variable aléatoire qui à un lot de 100 plaquettes extraites de la fabrication associe le nombre de plaquettes rejetées contenues dans ce lot.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.
2. En admettant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, préciser son paramètre.

   Quelle est alors la probabilité d'obtenir strictement moins de 10 plaquettes rejetées dans un lot de 100 plaquettes ?

Exercice 2 : (*9 points*) **Transformée de Laplace et équation différentielle,** bts mai**,** *1998*

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que

a) $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

b) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$.

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

– Partie A – Détermination de la transformée de Laplace de f –

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Pour cela, nous admettons que f et ses dérivées premières et seconde admettent des transformées de Laplace. On note F la transformée de f. ($F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$).

Remarque – Je vous ai recopié *texto* l'énoncé de l'examen. Avec les notations habituelles utilisées en cours, le contenu de la dernière parenthèse serait plutôt : $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$.

1. Calculer en fonction de $F(p)$:

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right], \qquad \mathcal{L}\left[f'(t)\right], \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\left[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)\right],$$

2. Calculer $\mathcal{L}\left[e^{-t}U(t)\right]$ où U est l'échelon unité.

3. En déduire $F(p)$.

– Partie B – Détermination de f –

1. Vérifier que

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2},$$

puis montrer que

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

2. Déduire du résultat précédent l'expression de $f(t)$ pour t positif.

Brevet de Technicien Supérieur – groupement B
Session 1999

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance industrielle, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Mise en forme des alliages moulés, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Réalisation d'ouvrages chaudronnés, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Production industrielle et contrôle de qualité**

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1. Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre $293,5$ et $306,5$.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2. On note A l'événement : « *une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse* ».

On note de même B l'événement : « *une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse* ».

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont $p(A) = 0,03$ et $p(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « *les deux pièces du module sont défectueuses* » ;

E_2 : « *au moins une des deux pièces du module est défectueuses* » ;

E_3 : « *aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse* » ;

3. Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au **2.**

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est $0,902$.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binômiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

4. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale :

$$\text{de moyenne inconnue } \mu \qquad \text{et} \qquad \text{d'écart type } \frac{\sigma}{\sqrt{60}} \quad \text{avec} \quad \sigma = 0,084.$$

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près de la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon est $\overline{x} = 4,012$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b) Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « *la moyenne μ est obligatoirement entre* $3,991$ *et* $4,033$ ».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Exercice 2 : (*11 points*) **Problème d'examen,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1998*

Les parties **A.** *et* **B.** *peuvent être traitées de façon indépendante*

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E') \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l'équation (E)

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soient f et g les deux fonctions de la variable x définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)]$.

Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

3. *a*) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. *a*) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathcal{P}$.

5. *a*) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4\left(-4e^{-3} + 3e^{-2}\right)$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

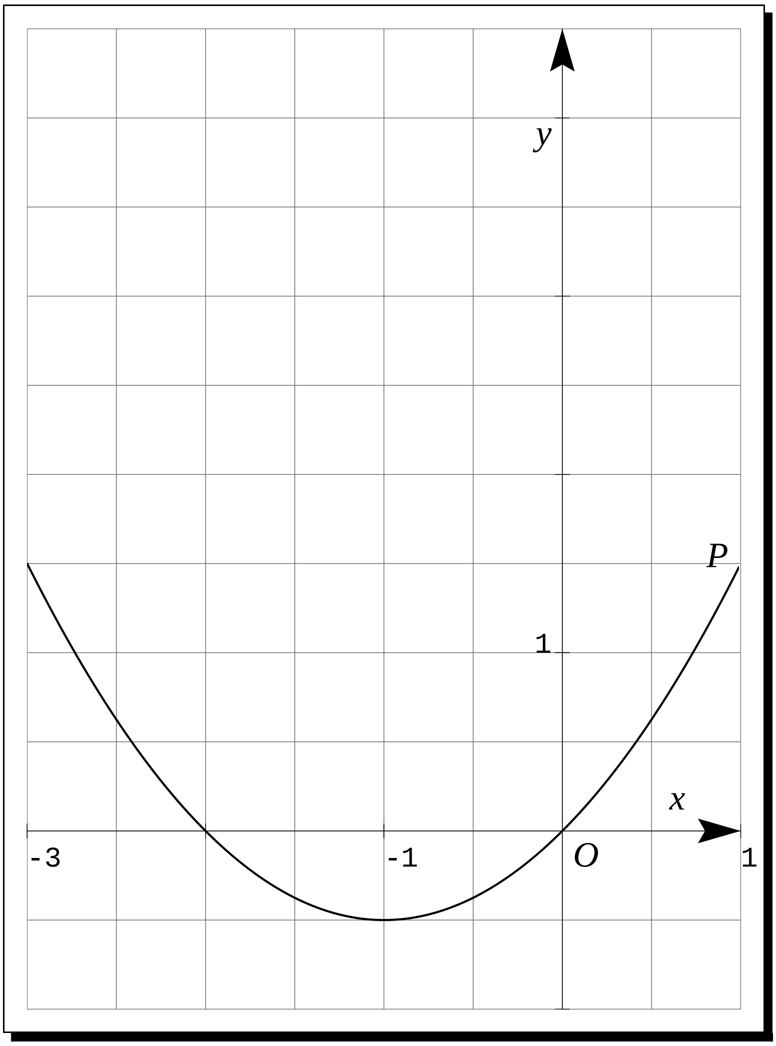
Feuille annexe (à rendre avec la copie)

– Partie B –

4. *a*)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$									

b)



Brevet de Technicien Supérieur – groupement B
Session 2000

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*8 points*) **Des boulons**. . . , *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise industrielle utilise de grandes quantités d'un certain type de boulons. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre de la tête ou le diamètre du pied d'un boulon est conforme à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

1. Un boulon de ce type est considéré comme conforme pour le diamètre de sa tête si celui-ci est, en millimètres, compris entre $25,30$ et $25,70$.

   On note D la variable aléatoire qui, à chaque boulon choisi au hasard dans un lot très important, associe le diamètre de sa tête.

   On suppose que D suit la loi normale de moyenne $25,50$ et d'écart-type $0,10$.

   Déterminer la probabilité qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme pour le diamètre de sa tête.

2. Dans un lot de ce type de boulons, 96% ont le diamètre de la tête conforme.

   On prélève au hasard 10 boulons de ce lot pour vérification du diamètre de leur tête. Le stock est suffisament important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 boulons.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 boulons, associe le nombre de boulons conformes pour le diamètre de la tête.

   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un boulon ne soit pas conforme pour le diamètre de la tête.

3. Dans cette question, on veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en mm, des pieds de boulon constituant un stock très important ; on se propose de construire un test d'hypothèse.

   On note Y la variable aléatoire qui, à chaque boulon tiré au hasard dans le stock, associe le diamètre, en mm, de son pied.

   La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0,1$.

   On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 boulons prélevé dans un stock, associe la moyenne des diamètres des pieds de ces 100 boulons (le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

   L'hypothèse nulle est $H_0 \ : \mu = 10$. Dans ce cas, les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied.

   L'hypothèse alternative est $H_1 \ : \mu \neq 10$.

   Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

   a) Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type $0,01$.

   b) Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que

   $$P\left(10 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 10 + h\right) = 0,95.$$

   c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

   d) On prélève un échantillon de 100 boulons et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pieds est $\overline{y} = 10,03$.

   Peut-on, au risque de 5%, conclure que les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied ?

Exercice 2 : (*12 points*) **Une équation différentielle d'ordre 2,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

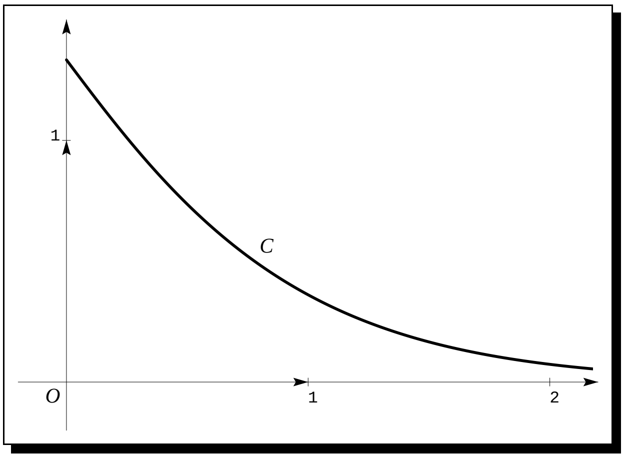
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

   (E_0) $$y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$
   est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions
   $$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$$



Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessus.

1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.
   a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$,
   $$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}.$$
   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et t, pour x positif au voisinage de 0.

4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale ;

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$I = \int_0^t f(x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}.$$

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question **4.***a*), et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.

BTS groupement B session 2001

Exercice 1 : (*9 points*) **Pièces métalliques et contrôle de qualité,** bts mai**,** *juin 2001*

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dons les cotés sont exprimés en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

– Partie A –

On note E l'événement : « *Une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme* ».

On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,9$.

On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

– Partie B –

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ».

Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$.

On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité pour que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.
3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153.

   On admet que les variables M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est $0,914$.

– Partie C –

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.

On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 est $p_2 = 0,879$.

La machine 1 fournit 60% de la production totale des ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.

On définit les événements suivants :

A : « *la pièce provient de la machine* 1 » ;

B : « *la pièce provient de la machine* 2 » ;

C : « *la pièce est conforme* ».

1. Déterminer les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(C|_A)$, $p(C|_B)$.

   (On rappelle que $p(C|_A)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)
2. En déduire $p(C \cap A)$ et $p(C \cap B)$.
3. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer $p(C)$.

Exercice 2 : (*11 points*) **Équation différentielle et étude de fonction,** bts mai**,** *juin 2001*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – *Résolution d'une équation différentielle* –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{2x}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la confition $f(0) = -1$.

– Partie B – *Étude d'une fonction* –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.
Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au *b*).

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

– Partie C – *Calcul intégral* –

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,dx$.
Démontrer que

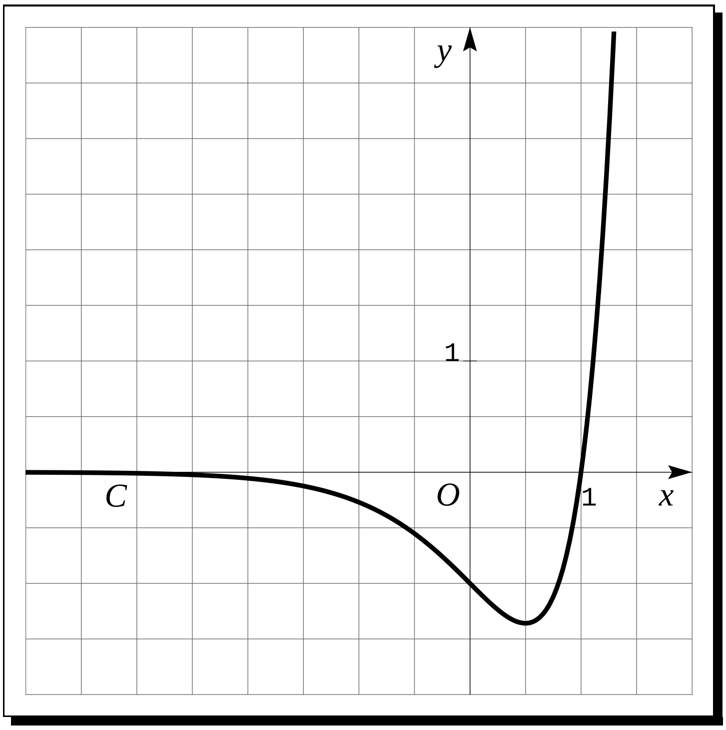
$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

2. *a*) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

b) À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Annexe


y
1
C
O
1
x

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2002

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*8 points*) **Assurances d'une flotte de véhicules**

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse aux sinistres suceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.

Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} **près.**

1. *Étude du nombre de sinistres par véhicule*

Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée.

On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $0,28$.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « *un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée* ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « *un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée* ».

2. *Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs*

On note E l'événement : « *un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée* ».

On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,6$.

On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à untirage avec remise de 15 conducteurs.

On coinsidère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

a) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. *Étude du coût des sinistres*

Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros.

On suppose que C suit la loi normale de moyenne $1\,200$ et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre $1\,000$ euros et $1\,500$ euros.

4. La question ci-dessous doit être traitée par les candidats de toutes les spécialités de BTS du groupement B, à l'exception du BTS Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques.

On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

a) Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

b) Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

On suppose que F suit la loi normale

$$\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « *le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b*) ». Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

4. La question ci-dessous doit être traitée uniquement par les candidats au BTS Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques.

Pour un parc de véhicules, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant la première année de mise en service.

Pour les véhicules ayant eu, au plus, quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Effectif : n_i	1 345	508	228	78	35

a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
$y_i = \ln n_i$					

b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme

$$y = ax + b$$

où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

c) À l'aide de l'équation précédente, estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation.

Exercice 2 : (*12 points*) **Équation différentielle, développement limité, relations fonctionnelles**

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E)

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle E qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$. Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au *b*).

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

– Partie C – Calcul intégral –

1. *a*) La fonction f définie dans la partie **B** étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = (-6x-4)e^{-x},$$

montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x+4)e^{-x}\right].$$

b) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x+10)e^{-x}\right].$$

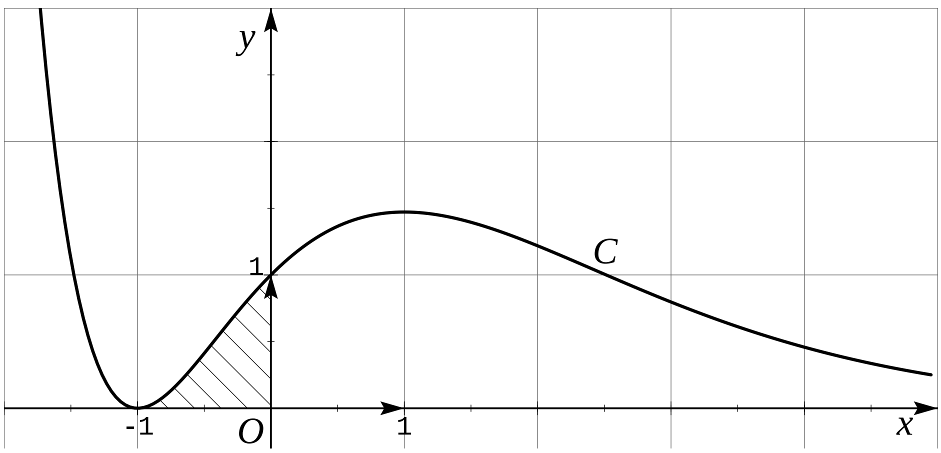
Montrer que F est une primitive de f.

c) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F(x) = (-x^2-4x-5)e^{-x}.$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unité d'aire,

$$A = e - 5.$$



Brevet de Technicien Supérieur

Session 2003

Épreuve de mathématiques

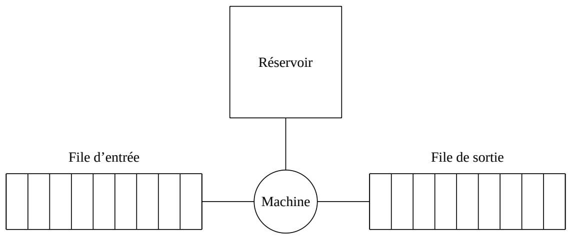
Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Une chaîne d'embouteillage,** *bts mai, mai 2003*

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides, selon le schéma ci-contre.

L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.



1. *Défaut d'approvisionnement*

   On considère qu'il y a défaut d'approvisionnement :

   – soit lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide,
   – soit lorsque le réservoir est vide.

   On tire au hasard un jour ouvrable dans une année. On note A l'événement : « *la file d'attente est vide au moins une fois dans la journée* » et B l'événement : « *le réservoir est vide au moins une fois dans la journée* ».

   On suppose que les événements A et B sont indépendants et une étude statistique a montré que

   $$p(A) = 0,04 \qquad \text{et} \qquad p(B) = 0,02.$$

   Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) $E_1 = A \cap B$.

   b) E_2 : « *la machine a connu au moins un défaut d'approvisionnement dans la journée* ».

2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*

   On note X la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirée au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de pannes de la machine. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$.

   Déterminer, à l'aide de la table du formulaire :

   a) $p(X \leqslant 2)$;

   b) la probabilité de l'événement « *la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs* »;

   c) le plus petit entier n tel que : $p(X \leqslant n) \geqslant 0,99$.

Dans tout ce qui suit, les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

3. *Qualité de l'embouteillage à la sortie*

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production d'une heure, associe le volume d'eau qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, Y suit la loi normale de moyenne $1,5$ et d'écart-type $0,01$.

Une bouteille d'eau est conforme aux normes de l'entreprise lorsqu'elle contient entre $1,47$ et $1,53$ litre d'eau.

Calculer la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.

4. *Fiabilité d'une machine à embouteiller*

On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, asssocie sa durée de vie avant une défaillance.

On note $p(T > t)$ la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.

On suppose que $p(T > t) = e^{-0,005t}$.

a) Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

b) Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à $0,8$. Arrondir à l'entier par défaut.

Exercice 2 : (*11 points*) **Équation différentielle,** *bts mai, mai 2003*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

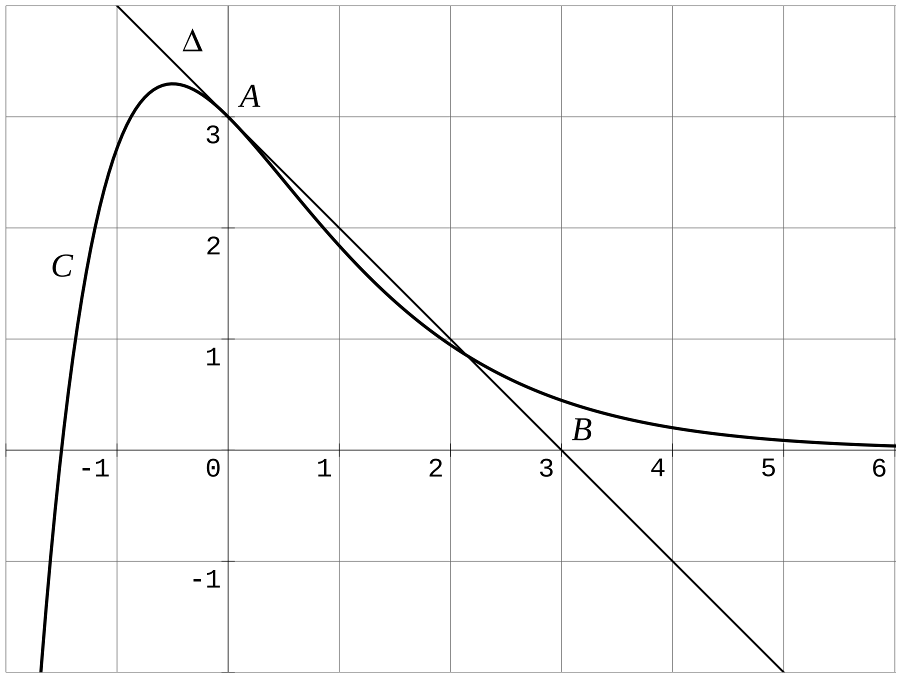
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

– Partie B - Étude d'une fonction –

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3, 0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.

b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)e^{-x}.$$

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$;

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (On ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.)

3. *a*) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

– Partie C - Calcul intégral –

1. La fonction f définie dans la partie **B** est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}.$$

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que $I = 5 - 6e^{-1/2}$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\,dx$.

a) Démontrer que $J = 65/48$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c) Vérifier que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.

Brevet de Technicien Supérieur
Session 2004
Épreuve de mathématiques

<u>durée</u> : 2h

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Des tiges métalliques. . . ,** *bts mai, session 2004*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A - Loi normale.

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[99,45;100,55]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur.

On suppose que X suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type $0,25$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que :
$$p(100 - h \leqslant X \leqslant 100 + h) = 0,95.$$
Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B - Loi binomiale et loi de Poisson.

Dans un lot de ce type de tiges, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. On considère que la loi suivie par Y peut-être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
4. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au **4.**
Calculer $p(Z = 2)$ et $p(Z \leqslant 2)$.

C - Intervalle de confiance.

Dans cette question, on s'intéresse au diamètre des tiges, exprimé en millimètres.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tiges dans la production d'un journée.

Soit $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production d'un journée, associe la moyenne des diamètres des tiges de cet échantillon.

On suppose que $\overline{D}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma/\sqrt{50}$ avec $\sigma = 0,19$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 9,99$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des tiges produites dans cette journée.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des tiges produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.
3. On considère l'affirmation suivante : « *la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenue à la question* **2.** ».
Est-elle vraie ? (on ne demande pas de justification.)

Exercice 2 : (*11 points*) **Hauteurs de crues et probabilités,** *bts mai, session 2004*

Dans cet exercice, on étudie une fonction qui intervient dans des calculs de probabilité à propos de la crue d'un fleuve. (Source : un bureau d'étude du domaine de l'équipement.)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A - Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ : y' + (0,4x)y = 0,4x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle
$$(E_0)\ : y' + (0,4x)y = 0.$$
2. Montrer que la fonction constante h, définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Vérifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.

B - Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\quad f(x) = 0,4xe^{-0,2x^2}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les unités graphiques étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$,
$$f'(x) = 0,4\left(1 - \sqrt{0,4}x\right)\left(1 + \sqrt{0,4}x\right)e^{-0,2x^2}.$$
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$.
   c) Donner le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   On y fera figurer la valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de la fonction f.
3. Un logiciel de calcul formel fournit pour f le développement limité suivant, à l'ordre 3, au voisinage de 0 :
$$f(x) = 0,4x - 0,08x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0.$$
   Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.
   En déduire une équaion de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position relative de T et C au voisinage de ce point.
4. Tracer sur la copie la tangente C et la courbe C dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ défini au début de la partie B.

C - Application à un problème de probabilité.

Une étude statistique, fondée sur un historique des crues d'un fleuve, permet de faire des prévisions dur sa hauteur maximale annuelle, en mètres.

On note X la variable aléatoire qui, à une année prise au hasard dans une longue période, associe la hauteur maximale du fleuve en mètres.

Soit x un réel positif. La probabilité qu'una année donnée la hauteur maximale du fleuve soit inférieure à x mètres est

$$p(X \leqslant x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie dans la partie B.

On admet que : $\qquad \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-0,2x^2}$.

1. Les digues actuelles ne protègent l'agglomération que lorsque la hauteur du fleuve est inférieure à 4 mètres.
   Calculer la probabilité $p(X \leqslant 4)$ qu'une année donnée, l'agglomération soit protégée de la crue; arrondir le résultat à 10^{-2}.
2. Afin de réaliser des travaux pour améliorer la protection de l'agglomération, on cherche la hauteur x_0, en mètres, telle que $P(X \leqslant x_0) = 0,99$.

a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $e^{-0,2x_0^2} = 0,01$.

b) Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de x_0.

c) On considère l'affirmation suivante : « *En surélevant les digues d'un mètre, la probabilité qu'une année prise au hasard, l'agglomération soit protégée est supérieure à* 0,99 ».

Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication.)