Corrigé du bac blanc STL

Exercice 1 : (*4 points*) **Coût de revient d'une série de production**

1. Une fois entrées les hypothèses, il est facile d'obtenir le tableau suivant :

Nombre d'objets	avec le défaut A	sans le défaut A	Total
avec le défaut B	8	4	**12**
sans le défaut B	8	**180**	188
Total	**16**	184	200

2. On choisit au hasard un objet dans la production. En supposant être dans une situation d'équiprobabilité on a immédiatement, avec les hypothèses du texte, la loi suivante :

Valeurs de X : x_i	950	1 050	1 100	1 200
$p(X = x_i)$	90%	4%	2%	4%

3. *a*) On trouve $\boxed{E(X) = 967}$ et $\boxed{\sigma(X) \approx 55,32}$. L'espérance $E(X)$ représente, pour l'usine, le coût moyen de chaque objet « après la production d'une infinité d'objets ». De façon plus rigoureuse, $E(X)$ est la limite du coût moyen par objet lorsque le nombre d'objets produits tend vers l'infini.

b) En vendant ses produits à un coût inférieur au coût espéré de production, et si elle continue longtemps cette production, l'entreprise n'a a peu près $\boxed{\text{aucune chance de faire des bénéfices}}$.

c) Pour faire un bénéfice moyen de 100 F, il faut vendre chaque objet 100 F au-dessus du coût espéré de production. Autrement dit, il faut choisir un $\boxed{\text{prix de vente de 1 067 F}}$.

Exercice 2 : (*5 points*) **Complexes et géométrie**

1. *a*) On utilise la méthode du discriminant. On trouve $\Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2$. D'où les deux racines complexes conjuguées :

$$\boxed{z_A = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_B = 2 - 2i\sqrt{3}}$$

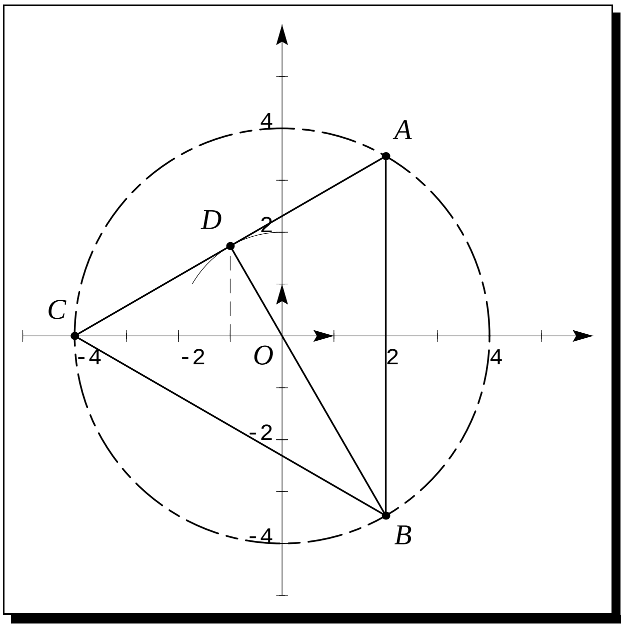
b) Le module de z_B est $|z_B| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12}$, soit $\boxed{|z_B| = 4}$. Son argument θ_B vérifie les relations

$$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{2}{4} \\ \sin\theta_B = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos\theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \boxed{\theta_B = -\frac{\pi}{3}} \quad \text{à } 2k\pi \text{ près}$$

On a donc finalement $\boxed{z_B = \left[4, -\frac{\pi}{3}\right] = 4e^{-i\pi/3}}$.

De la même façon, on trouve $\boxed{z_A = \left[4, \frac{\pi}{3}\right] = 4e^{i\pi/3}}$.

c)



2. *a*) De la même manière que précedemment, on trouve $\boxed{|z_C| = 4}$ et $\cos\theta_C = -1$ avec $\sin\theta_C = 0$. On en déduit que $\boxed{\theta_C = \pi}$ convient.

Pour z_D, on trouve $\boxed{|z_D| = 2}$ d'où $\cos\theta_D = -1/2$ et $\sin\theta_D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\boxed{\theta_D = 2\pi/3}$ à $2k\pi$ près. Finalement, on a

$$\boxed{z_C = [4, \pi] = 4e^{i\pi}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_D = \left[2, \frac{2\pi}{3}\right] = 2e^{2i\pi/3}}$$

3. *a*) On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4$, donc on a l'égalité de distances $OA = OB = OC = 4$. En d'autres termes, les points A, B et C sont tous sur le $\boxed{\text{même cercle de centre } O \text{ et de rayon } 4}$.

b) Le milieu du segment $[AC]$ a pour affixe

$$\frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(2 + 2i\sqrt{3} - 4) = -1 + i\sqrt{3} = z_D$$

Donc $\boxed{D \text{ est bien le milieu de } [AC]}$.

c) On calcule les différentes distances concernées, puis on applique le théorème de Pythagore :

$$AB = |z_B - z_A| = |(2 - 2i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-4i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{AB = 4\sqrt{3}}$$
$$AD = |z_D - z_A| = |(-1 + i\sqrt{3}) - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} \quad \text{soit} \quad \boxed{AD = 2\sqrt{3}}$$
$$BD = |z_D - z_B| = |(-1 + i\sqrt{3}) - (2 - 2i\sqrt{3})| = |-3 + 3i\sqrt{3}| = \sqrt{36} \quad \text{soit} \quad \boxed{BD = 6}$$

On a bien $AB^2 = AD^2 + BD^2$ donc $\boxed{BDA \text{ rectangle en } D}$.

d) Il suffit de calculer les deux distances encore inconnues :

$$AC = |z_C - z_A| = |-4 - (2 + 2i\sqrt{3})| = |-6 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{AC = 4\sqrt{3}}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |-4 - (2 - 2i\sqrt{3})| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{BC = 4\sqrt{3}}$$

Finalement, on a $AC = BC = AB$ donc $\boxed{ABC \text{ est équilatéral}}$.

Exercice 3 : (*11 points*) **Étude d'une fonction comportant un logarithme**

I **1.** On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2+\ln x}{x} = -\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x+2+\ln x = -\infty.$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$, ce qui prouve que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

2. *a*) En réduisant l'expression proposée au même dénominateur, on vérifie immédiatement que l'on a bien $\boxed{f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}$.

b) En utilisant l'écriture précédente, il vient

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1}$$

puisque

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{d'après le cours.}$$

c) Le résultat précédent prouve alors que la droite $\boxed{y = 1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f}$.

3. *a*) Calculons la dérivée à partir de la première écriture de $f(x)$. Il vient :

$$f'(x) = \frac{(1+\frac{1}{x}) \times x - (x+2+\ln x)}{x^2} = \frac{x+1-x-2-\ln x}{x^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}}.$$

b) *c*) Il est clair que $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln x$ puisque x^2 est toujours positif. Or

$$-1-\ln x \geqslant 0 \iff -1 \geqslant \ln x \iff e^{-1} \geqslant x$$

d'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	1

où

$$\begin{aligned} f(e^{-1}) &= 1 + \frac{2}{e^{-1}} + \frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= 1 + 2e - e \end{aligned}$$

soit $\boxed{f(e^{-1}) = 1 + e \approx 3,718}$

II **1.** *a*) Il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{2}{x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = 1}$$

b) Avec la formule de la dérivée d'un quotient, on trouve $\boxed{g'(x) = -2/x^2}$, dont le signe est $\boxed{\text{toujours négatif}}$.

c) D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

2. Les limites précédentes nous indiquent deux asymptotes pour la courbe H :

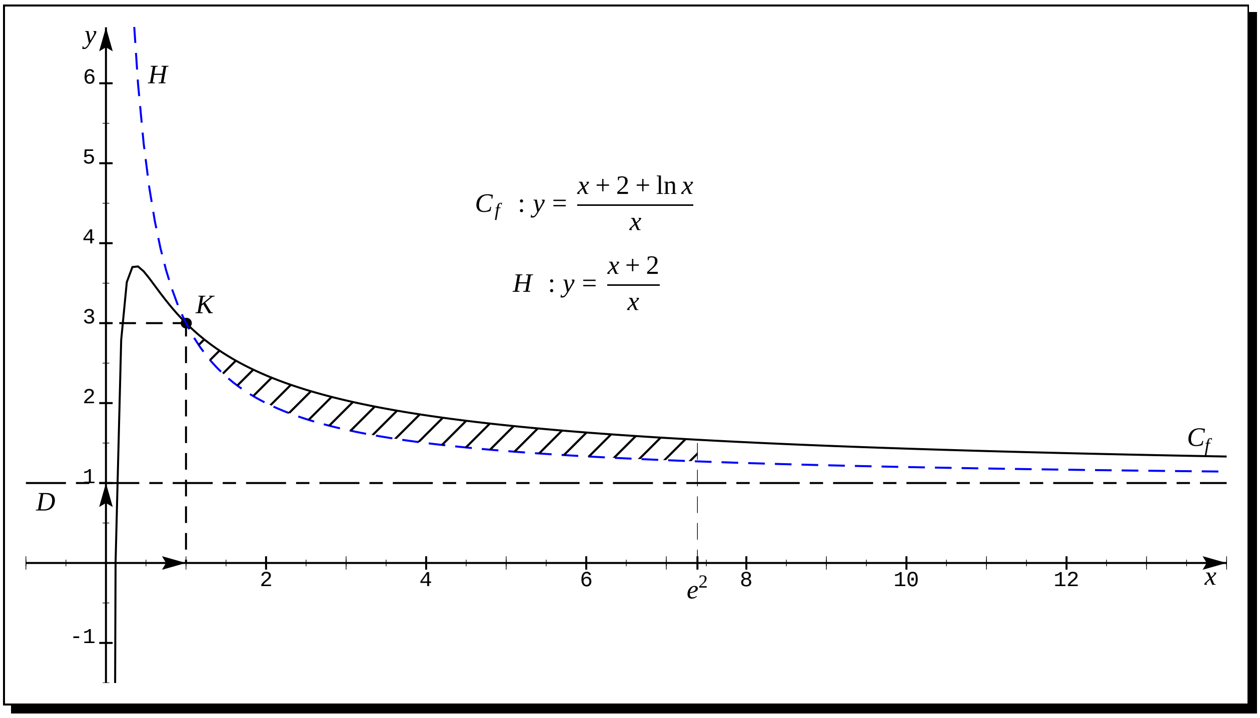
$$\boxed{x = 0 \text{ asymptote verticale}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y = 1 \text{ asymptote horizontale}}$$

3. Il vient facilement $\boxed{f(x) - g(x) = (\ln x)/x}$, qui est du signe de $\ln x$ puisque x est toujours positif sur l'intervalle considéré. Et comme l'étude du signe de cette différence nous donne les positions relatives des courbes C et H, on a le tableau récapitulatif suivant

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	
positions relatives		C au dessous de H		C au dessus de H	

tableau qui nous prouve entre autre que le point K d'abscisse 1 est $\boxed{\text{le seul point d'intersection entre } H \text{ et } C}$.

III **1.**



2. La fonction u est de la forme kU^2, donc sa dérivée est $2kU'U$. Il vient donc

$$u'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \qquad \text{soit} \qquad u'(x) = \frac{\ln x}{x},$$

ce qui prouve que $\boxed{u \text{ est une primitive de } \dfrac{\ln x}{x}}$.

3. L'unité d'aire est de 2 cm $\times$2 cm = 4 cm^2. De plus, étant donné que la courbe C est au dessus de la courbe H pour $x > 1$, on a

$$A = 4 \times \int_1^{e^2} f(x) - g(x)\,dx = 4 \times \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx = 4 \times \Big[u(x)\Big]_1^{e^2} = 4 \times \Big(u\big(e^2\big) - u(1)\Big) \quad \text{soit} \quad \boxed{A = 8\,\text{cm}^2}$$

puisque $\ln e^2 = 2$ et $\ln 1 = 0$.