Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : (*6 points*) **Calculs d'intégrales**

Il vient

$$A = \int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = \frac{4}{3}}$$

Il vient

$$B = \int_1^2 x - \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = 1}$$

Enfin, on a

$$C = \int_0^\pi 2\sin x\,dx = \Big[-2\cos x\Big]_0^\pi = -2 \times \Big[\cos x\Big]_0^\pi = -2\Big(\cos\pi - \cos 0\Big) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C = 4}$$

Exercice 2 : (*2 points*) **Primitive**

On reconnait une fonction de la forme $f = u'/u^2$ On en déduit qu'une primitive est, par exemple, $F = -1/u$, autrement dit

$$\boxed{F(x) = \frac{-1}{3x-1}}.$$

Exercice 3 : (*3 points*) **Intégrale de fonction trigonométrique (linéarisation)**

Il vient

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\Big(1 + \cos 2x\Big)\,dx = \frac{1}{2} \times \int_0^\pi \Big(1 + \cos 2x\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2} \times \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : (*9 points*) **Aire entre deux courbes**

1. *a*) On vérifie facilement que $(x-1)^2(2x+3) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$, ce qui prouve que $\boxed{P(x) = (x-1)^2(2x+3)}$.

b) Il vient

$$P(x) = 0 \iff (x-1)^2(2x+3) = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (2x+3) = 0$$

On trouve donc deux solutions : $\boxed{x = 1 \text{ et } x = -3/2}$.

2. *a*) Il vient

$$f(x) = g(x) \iff (2x^3 + 3x^2 + 6) - (4x^2 + 4x + 3) = 0 \iff 2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0 \iff \boxed{P(x) = 0}$$

Et rechercher l'intersection des courbes C_1 et C_2 revient à résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} &\iff \begin{cases} g(x) = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = f(x) - g(x) \\ y = g(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = P(x) \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3/2 \\ y = g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Et comme $g(1) = 11$ et $g(-3/2) = 6$, on en déduit les deux points d'intersection : $\boxed{A(-3/2;6)}$ et $\boxed{B(1;11)}$.

b) On a, en unité d'aire,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-3/2}^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_{-3/2}^1 P(x)\,dx = \int_{-3/2}^1 2x^3 - x^2 - 4x + 3\,dx \\ &= \left[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3/2}^1 = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-3/2}^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(\frac{81}{32} + \frac{27}{24} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A} = \frac{625}{96}$ en unité d'aire. Or 1 ua $= 0,5\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} = 0,5\,\text{cm}^2$, d'où

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{625}{192}\,\text{cm}^2 \approx 3,255\,\text{cm}^2 \approx 325,5\,\text{mm}^2}$$

(car $1\,\text{cm} = 10\,\text{mm}$, donc $1\,\text{cm}^2 = 10^2\,\text{mm}^2$)
