Corrigé du devoir surveillé n° 8

Exercice 1 : Équations avec une exponentielle

a) Il vient $e^x = 3 \iff \boxed{x = \ln 3}$.

b) Et l'équation $e^x = -2$ n'admet $\boxed{\text{aucune solution}}$ puisque l'exponentielle est toujours positive.

Exercice 2 : Études de fonctions exponentielle

On trouve $\boxed{f'(x) = 3e^x - 2e^{2x} = \left(3 - 2e^x\right)e^x}$.

D'où le tableau :

x	$-\infty$		$\ln(3/2)$		$+\infty$
$3-2e^x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	

Exercice 3 : Études de fonctions exponentielle

On remarque que $g(x)$ s'écrit également $g(x) = e^{-x}$. D'où $\boxed{g'(x) = -e^{-x}}$ et $\boxed{g'(x) \text{ est toujours négatif}}$ puisque e^{-x} est toujours négatif. On en déduit que $\boxed{g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 4 : Une étude facile, *bac F6, 1993*

1. *a*) On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = (2x-4)e^x \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-4) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

b) Et on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ puisque

$$f(x) = 2xe^x - 4e^x \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{(formulaire)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

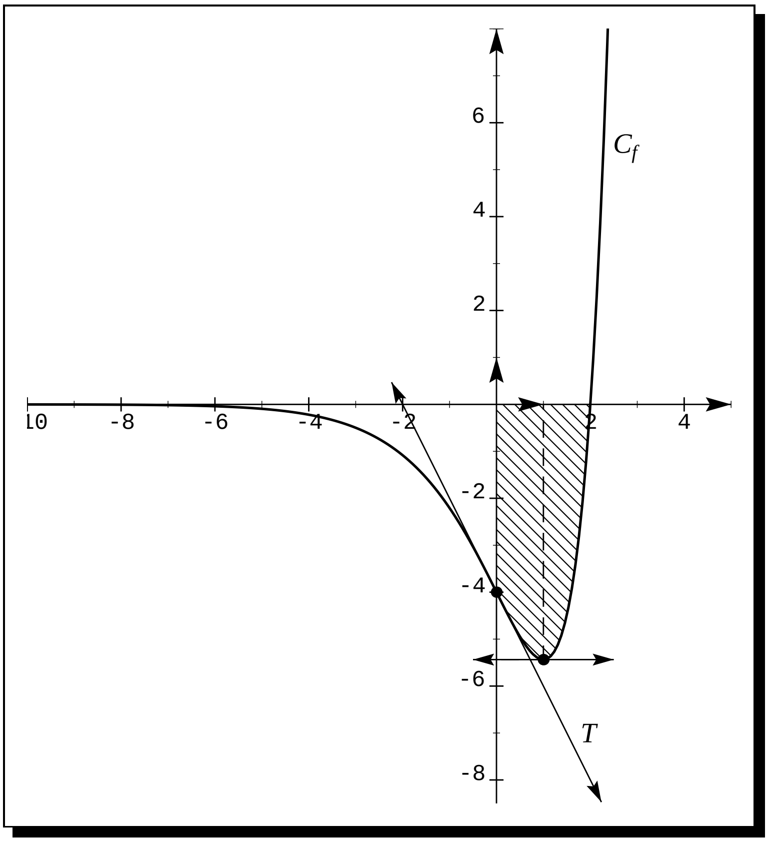
On en déduit que la courbe de la fonction f admet $\boxed{\text{l'axe } Ox \text{ comme asymptote horizontale}}$.

2. On trouve $f'(x) = 2e^x + (2x-4)e^x$, soit $\boxed{f'(x) = 2(x-1)e^x}$. Comme e^x est toujours strictement positif, cette dérivée est du signe de $x-1$ et on a immédiatement le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2e \approx -5,436$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a $f(0) = -4$ et $f'(0) = -2$. En utilisant la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, il vient $\boxed{T\ : y = -2x - 4}$

4.



5. *a*) On trouve $F'(x) = ae^x + (ax+b)e^x$, soit $\boxed{F'(x) = (ax + a + b)e^x}$.

b) Pour que F soit une primitive de f, on doit avoir $F'(x) = f(x)$, soit $(ax + a + b) = (2x - 4)$. D'où le système d'équation

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -4 \end{cases} \iff (a, b) = (2, -6)$$

La fonction F définie par $\boxed{F(x) = (2x - 6)e^x}$ est donc la primitive de f cherchée.

6. D'après la définition donnée du domaine plan, on voit que $f(x)$ est négatif pour x dans l'intervalle $[0, 2]$. Comme l'unité d'aire est de 1 cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ est donnée par le calcul

$$\mathcal{A} = -\int_0^2 f(x)\,dx = \int_2^0 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_2^0 = F(0) - F(2) = -6 + 2e^2.$$

On a donc $\boxed{\mathcal{A} = 2e^2 - 6\,\text{cm}^2 \approx 8,78\,\text{cm}^2}$.