NOM :

tgm 2 23 novembre 2005

Devoir surveillé n° 4

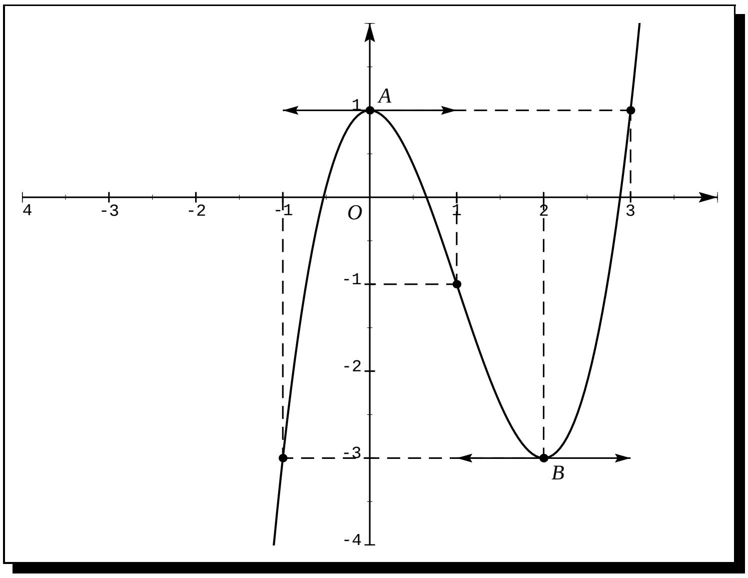
<u>durée</u> : 2h

Exercice 1 : (*10 points*) **Étude d'une cubique – Calcul d'aire**

1. Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité de longueur 2 cm). On considère C_f, la représentation graphique de la fonction numérique f définie définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles. La représentation graphique de la courbe C_f est donnée ci-dessous :



On précise qu'aux points A et B, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

a) À l'aide du graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

b) Déterminer les valeurs des constantes a, b, c et d.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

a) Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Autrement dit calculer la dérivée $g'(x)$, étudier le signe de cette dérivée, puis établir le tableau de variations de $g(x)$.)

3. On admet que la représentation graphique donnée ci-avant est celle de C_g, la courbe représentative de la fonction g.

a) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1, 2]$.

b) Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C_g, l'axe Ox et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

c) Hachurer cette aire sur le dessin.

NOM : tgm 2 23 novembre 2005

Exercice 2 : (*10 points*) **Étude d'une fonction rationnelle**

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. *a*) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}.$$

b) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe C_f.

3. On considère la droite Δ d'équation $y = x$.

a) Montrer que Δ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

b) Déterminer les coordonnées de K, le point d'intersection de la droite Δ avec la courbe C_f.

4. *a*) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

c) Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.

5. Représenter les droites T et Δ ainsi que la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.