Suites géométriques

Exercice 1 : Une suite géométrique simple

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = 3^n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, et u_3.
2. Déterminer les caractéristiques de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 : Une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ vérifiant $u_1 = 2$. Déterminer u_0 et u_{10}.

Exercice 3 : Une suite géométrique définie par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n \quad \text{pour tout entier } n > 0$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Déterminer les caractéristiques de la suite $(u_n)_n$.
3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4 : À la banque : les intérêts composés

1. On place 10 000 Euros sur un compte bancaire rémunéré au taux de 5% par an. On note $u_0 = 10\,000$ et u_n la somme disponible à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.
   a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
   b) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Caractériser la suite (u_n).
   d) Quelle est la somme disponible au bout de 10 ans ?
   e) Au bout de combien d'années aura-t-on 20 000 Euros ou plus sur ce compte ?
2. Reprendre les questions précédentes si le taux est maintenant de $2,5$% par an.

Exercice 5 : De la Terre à la Lune

Une feuille de papier a un dixième de millimètre d'épaisseur. On note $u_0 = 0,1$. On la plie la feuille en deux, et on note u_1 l'épaisseur du pliage obtenu. On recommence plusieurs fois de fois de suite cette opération, et on note u_n l'épaisseur obtenue après le $n^{\text{ième}}$ pliage.

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2, u_3.
2. Caractériser la suite (u_n) ainsi obtenue.
3. On plie la feuille 30 fois de suite. Quelle est l'épaisseur obtenue ?
4. Sachant que la distance Terre – Lune est d'environ 384 000 km, combien de fois faudra-t-il plier la feuille pour obtenir cette distance ?

Exercice 6 : Somme des premiers termes d'une suite géométrique

1. Développer chacune des expressions suivantes :
   a) $(1 - X)(1 + X)$
   b) $(1 - X)(1 + X + X^2)$
   c) $(1 - X)(1 + X + X^2 + X^3)$
   d) $(1 - X)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$
   e) $(1 - X)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)$
   f) et $(1 - X)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + \cdots + X^{n-1} + X^n)$ à votre avis ?
2. Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
   a) Exprimer u_n en fonction de u_0, q et n (n désignant un entier strictement positif).
   b) En vous servant des questions précédentes, montrer que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 7 : Suite : une application directe du cours

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$v_0 = 9 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

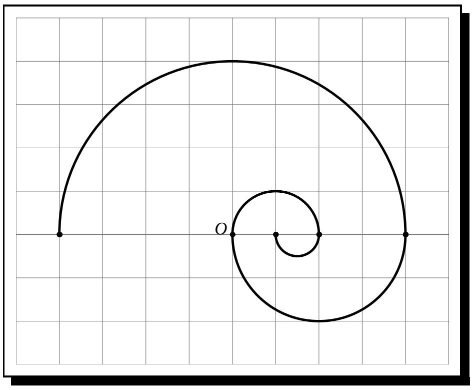
1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Préciser, en les justifiant, la nature et les caractéristiques de cette suite.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Représenter graphiquement la suite (v_n).
5. Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{117}$. (Valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.)

Exercice 8 : Somme des premiers termes d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Calculer la somme
$$S_{10} = \sum_{i=0}^{i=10} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 + u_{10}$$
3. Calculer la somme
$$S_{15} = \sum_{i=0}^{i=15} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{14} + u_{15}$$

Exercice 9 : La longueur de la spirale



Sur la figure ci-dessus, chacun des demi-cercles a pour diamètre un rayon du demi-cercle précédent.

Le bit de cet exercice est de calculer la longueur de cette spirale lorsqu'elle est composée de 6 demi-cercles, le rayon du plus grand mesurant 8 cm.

On note r_n le rayon du n-ième demi-cercle de la spirale ci-dessus, en posant $r_1 = 1$.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
2. Montrer que $(r_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Exprimer r_n en fonction de n.
4. Répondre au problème posé en introduction.