Suites géométriques

Exercice 1 : Le jeu d'échec

La légende raconte que le roi de Perse voulut récompenser l'inventeur du jeu d'échec, qui habitait son royaume. Il le fit convoquer et lui demanda ce qu'il désirai en récompense de son invention. « Je désirerai un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière des 64 cases de mon échiquier ». Le roi, qui n'était pas mathématicien, fût étonné de la modestie de la demande : « C'est tout ? » lui fit-il. . .

Hélas, après avoir calculé et recalculé toute la nuit, les savants durent annoncer au roi que toutes les réserves du royaume ne suffiraient pas, et que l'on ne pourrait jamais payer un tel tribut.

a) Au bout du compte, combien de grains de blé l'inventeur demande-t-il au roi ?

b) En admettant qu'un grain de blé fasse environ un dixième de gramme, déterminer (en tonnes) le poids représentant la quantité totale demandée par l'inventeur.

Exercice 2 : Datation au Carbone 14

Les êtres vivants retiennent dans leurs tissus un isotope du carbone 12 : le carbone 14. La proportion entre les deux carbones reste constante dans l'organisme vivant. Après la mort, alors que la quantité de carbone 12 reste constante, le carbone 14 se désintègre (il est donc radioactif). C'est en mesurant cette désintégration que les archéologues peuvent dater les objets. On sait que le carbone 14 se désintègre à raison de $1,2$ % tous les 100 ans environ.

a) On dispose d'un échantillon contenant 5 grammes de carbone 14. Combien en contiendra-t-il dans 1000 ans ? dans 3500 ans ?

b) On a découvert dans une grotte en Dordogne un foyer contenant du charbon de bois. À quantité égale, on a mesuré qu'un charbon de bois actuel contient $1,5$ fois plus de carbone 14 que le charbon de bois trouvé dans la grotte (autrement dit, la quantité de carbone 14 a été divisé par $2,5$ depuis la mort du bois devenu charbon). En déduire une datation de l'occupation de la grotte.

Exercice 3 : Désintégration d'un corps radioactif

Les éléments radioactifs sont instables et ont tendance à se désintégrer. En général, pour un atome donné, il est absolument impossible de prévoir à quel instant va se produire sa désintégration. En revanche, on a une propriété surprenante lorsque l'on dispose d'une grande quantité de noyaux radioactifs de même nature : on connaît très précisément le laps de temps nécessaire (et suffisant) pour que la moitié des atomes se désintègrent. On appelle *demi-vie* ou *période*, et on note T ce laps de temps (dépendant du corps considéré).

Par exemple, pour l'iode 131, la demi-vie est $T = 8$ jours. Ainsi, si l'on dispose d'un gramme d'iode 131, il en restera un demi-gramme au bout de 8 jours, un quart de gramme au bout de 16 jours, un huitième de gramme au bout de 24 jours, etc. . .

1. On considère un ensemble de N_0 noyaux radio-actifs d'iode 131, de demi-vie T. On note :

$$\begin{aligned}
u_0 &= N_0 \quad \text{nombre initial de noyaux } (t = 0)\\
u_1 &= \text{nombre de noyaux restant après une période } (t = T)\\
u_2 &= \text{nombre de noyaux restant après deux périodes } (t = 2T)\\
&\vdots\\
u_n &= \text{nombre de noyaux restant après } n \text{ périodes } (t = nT)
\end{aligned}$$

a) Déterminer u_1 en fonction de u_0, puis u_2 en fonction de u_1.

b) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

d) Déterminer u_n en fonction de n et de N_0.

e) À l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre de périodes nécessaires pour que $99,99\%$ des atomes soient désintégrés.

f) Combien faut-il de périodes pour que tous les noyaux soient désintégrés ?

2. *a*) Application : la demi-vie de l'Iode 131 est $T = 8$ jours. À l'instant $t = 0$, on dispose de N_0 atomes d'Iode 131. À partir de quel instant la quantité initiale aura-t-elle été divisée par 1000 ?

b) Reprendre la question précédente avec le césium 137 dont la période est $T = 30$ ans.

c) Reprendre la question précédente avec le plutonium 239 dont la période est $T \approx 24\,000$ ans.