Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 : (*13 points*) **Études de fonctions polynômes, résolution approchée d'équation**

A **1.** On trouve $\boxed{f'(x) = 3x}$, du signe de x, d'où le tableau de variations :

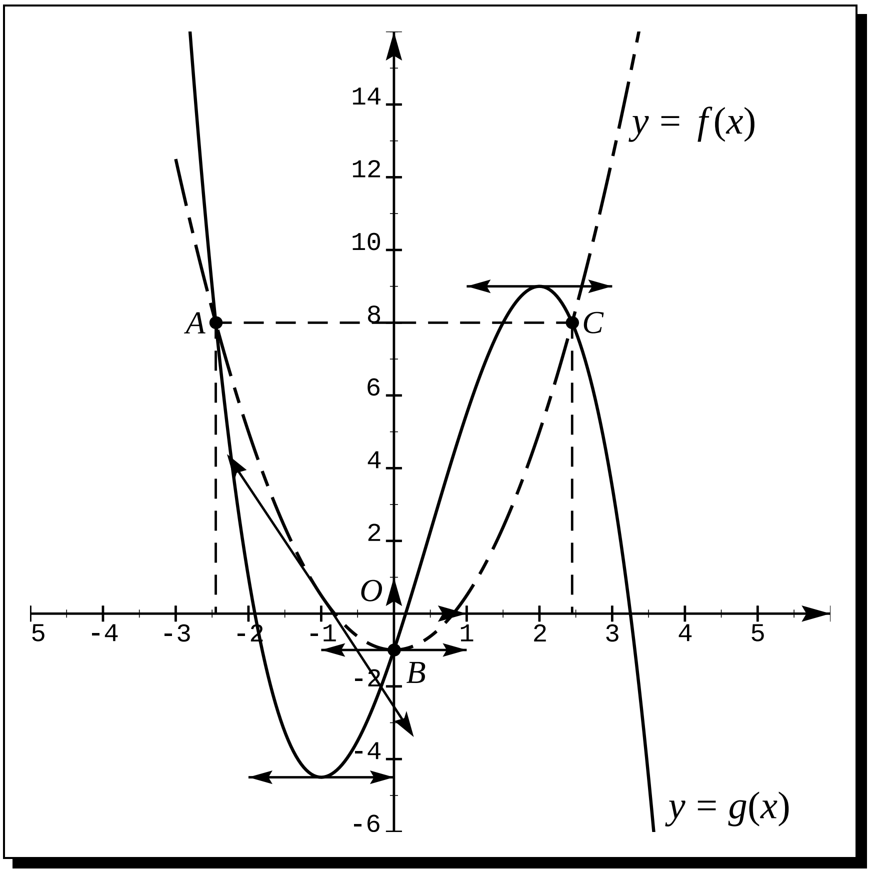
x	-3		0		4
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$12,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	23

2. On a

$$f(-1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f'(-1) = -3$$

d'où l'équation de la tangente cherchée : $\boxed{y = -3x - \frac{5}{2}}$.

3.



B **1.** *a*) Le calcul de la fonction dérivée donne $\boxed{g'(x) = -3x^2 + 3x + 6 = 3(-x^2 + x + 2)}$

b) La fonction dérivée est du signe de $-x^2+x+2$. La méthode du discriminant Δ, ici égal à 9, nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$. Or l'on sait qu'un polynôme du second degré est « *du signe de $-a$ entre les racines* ». D'où le signe de f' : $\boxed{\text{positive entre } -1 \text{ et } 2, \text{ négative sinon}}$.

c) D'où le tableau de variations de g :

x	-3		-1		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$21,5$	$\searrow$	$-9/2$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-17

2. Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \\ y = \frac{3}{2}x^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 1 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \\ y = \frac{3}{2}x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = -x^3 + 6x \\ y = \frac{3}{2}x^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = x(-x^2 + 6) \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 1 \end{cases}$$

L'équation $0 = x(-x^2 + 6)$ donne les 3 solutions $x = 0$, $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$, d'où les trois points d'intersection : $\boxed{A(-\sqrt{6}, -8)}$, $\boxed{B(0, 1)}$ et $\boxed{C(\sqrt{6}, -8)}$.

Exercice 2 : (*5 points*) Calcul de fonctions dérivées

a) On trouve $\boxed{f'(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{3}x = x\left(6x - \dfrac{2}{3}\right)}$

b) En utilisant $(1/u)' = (-u'/u^2)$ et en s'apercevant que $(4 - x)/2 = 2 - (1/2)x$, on trouve $\boxed{g'(x) = \dfrac{2}{(4 - x)^2} - \dfrac{1}{2}.}$

c) On utilise $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ avec $u = x^2 - x$, $u' = 2x - 1$, $v = x^2 + x + 2$ et $v' = 2x + 1$. On trouve alors

$$h'(x) = \frac{(2x - 1)(x^2 + x + 2) - (x^2 - x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(x^2 + x + 2)^2}.}$$

Exercice 3 : (*2 points*) Nombre dérivé et équation de tangente

La méthode la plus simple est certainement d'utiliser la formule

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

ce qui nous donne :

$$y = 1 \times (x + 2) + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = x + 3}.$$
