Brevet de Technicien Supérieur, session 2005

Exercice 1 : (*11 points*) *bts mai, session 2005*

A

1. Il vient

$$(1+x)y'+y=0 \iff y'=-\frac{1}{1+x}y$$

Cette équation est de la forme $y'=a(x)y$ avec $a(x)=-\frac{1}{1+x}$, et une primitive de a est $A(x)=-\ln(1+x)$. On en déduit que la solution générale de (E_0) est

$$y(x)=ke^{-\ln(1+x)}=ke^{\ln\left((1+x)^{-1}\right)} \quad \text{soit} \quad \boxed{y(x)=\frac{k}{1+x}} \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

2. Il vient :

$$g(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad \text{d'où} \quad g'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\times(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \quad \text{soit} \quad g'(x)=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}(1+x)g'+g &= (1+x)\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}\\ &= \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{g(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x} \text{ est une solution particulière de l'équation } (E)}$

3. La solution générale de (E) est donc $\boxed{y(x)=\frac{k+\ln(1+x)}{1+x}}$ où k est une constante réelle quelconque.

4. Comme $y(0)=k$, la condition initiale impose $k=2$, d'où la fonction cherchée : $\boxed{f(x)=\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}}$.

B

1. On a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$, donc $\boxed{\text{la droite } x=-1 \text{ est une asymptote verticale}}$ de la courbe C. Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc $\boxed{\text{la droite } y=0 \text{ est une asymptote horizontale}}$ de la courbe C.

2. *a*) En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient (voir partie A), on obtient bien $\boxed{f'(x)=\frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}}$.

b) Il vient

$$-1-\ln(1+x)\geqslant 0 \iff -1\geqslant \ln(1+x) \iff e^{-1}\geqslant 1+x \iff e^{-1}-1\geqslant x$$

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\boxed{S=\left]-1;e^{-1}-1\right]}$

c) D'où le tableau de variations

x	-1		$e^{-1}-1$		$+\infty$
$-1-\ln(1+x)$	||	$+$	0	$-$	
$(1+x)^2$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

3. *a*) L'équation de la tangente, c'est le DL d'ordre 1. D'où l'équation demandée : $\boxed{T\ : y=2-x}$.

b) Au voisinage de 0, la différence entre la courbe C et la tangente T est donnée par l'expression

$$2-x+\frac{1}{2}x^2-(2-x)=\frac{1}{2}x^2.$$

Cette expression est évidemment toujours positive, ce qui prouve qu'au voisinage de 0, $\boxed{C \text{ est au dessus de } T}$.

C **1.** La fonction G est de la forme ku^2 où k est une constante réelle. Sa dérivée est donc $G' = 2ku'u$, ce qui donne

$$G'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x} \times \ln(1+x) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{G'(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)}}.$$

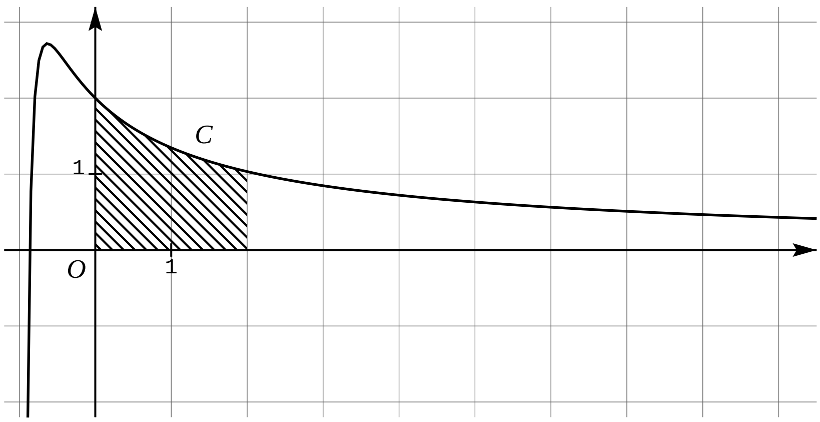
a) Comme $2\ln(1+x)$ est une primitive de $\frac{2}{1+x}$, il est clair que

$$\boxed{F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\big(\ln(1+x)\big)^2 \text{ est une primitive de } f}.$$

b) *c*) Il vient

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^2 = \left(2\ln(1+2) + \frac{1}{2}\big(\ln(1+2)\big)^2\right) - \left(2\ln(1+0) + \frac{1}{2}\big(\ln(1+0)\big)^2\right)$$
$$= \boxed{2\ln 3 + \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 = I \approx 2,80}.$$

d) Ce résultat correspond, en unités d'aire à $\boxed{\text{l'aire du domaine plan limité par } C, Ox, Oy \text{ et la droite } x = 2}$



Exercice 2 : (*9 points*) **Production de rondelles**. . . *bts mai, session 2005*

A **1.** X_1 suit la loi $\mathcal{N}(90; 0,17)$, donc $T_1 = (X - 90)/0,17$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Il vient alors :

$$p(89,6 \leqslant X_1 \leqslant 90,4) = p\left(\frac{89,6-90}{0,17} \leqslant \frac{X_1 - 90}{0,17} \leqslant \frac{90,4-90}{0,17}\right)$$
$$= p(-2,353 \leqslant T_1 \leqslant 2,353)$$
$$= 2\Pi(2,353) - 1 = 2 \times 0,990\,6 - 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{p(89,6 \leqslant X_1 \leqslant 90,4) = 0,981\,2}$$

2. D suit la loi $\mathcal{N}(90; \sigma_1)$, donc $T = (D - 90)/\sigma_1$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Il vient alors :

$$p(89,6 \leqslant D \leqslant 90,4) = 0,99 \iff p\left(\frac{89,6-90}{\sigma_1} \leqslant \frac{D-90}{0,17} \leqslant \frac{90,4-90}{\sigma_1}\right) = 0,99$$
$$\iff p\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leqslant T \leqslant \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$$
$$\iff 2\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$$
$$\iff \Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995 \iff \frac{0,4}{\sigma_1} = 2,58 \quad \text{soit} \quad \boxed{\sigma_1 = 0,155}.$$

B

1. On répète 4 fois, de manière indépendante, une expérience n'ayant que 2 issues possibles (défectueux ou non). La variable Y_1 compte le nombre d'issues défectueuses. On est bien dans le cadre d'une loi binomiale et $\boxed{Y_1 \text{ suit la loi } \mathcal{B}(4; 0,02)}$.
2. Il vient :
$$p(Y_1 = 0) = C_4^0(0,02)^0(0,98)^4 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y_1 = 0) = 0,922}.$$
3. Il vient :
$$p(Y_1 \leqslant 10) = p(Y = 0) + p(Y = 1) = 0,922 + 0,753 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y_1 \leqslant 1) = 0,997}.$$

C

1. La variable Y_2 suit une loi $\mathcal{B}(1\,000; 0,02)$. Son espérance mathématique est $E(Y_2) = 1\,000 \times 0,02$, soit $\boxed{E(Y_2) = 20}$ et son écart-type est $\sigma(Y_2) = \sqrt{1\,000 \times 0,02 \times 0,98}$, soit $\boxed{\sigma(Y_2) \approx 4,43}$. Comme on approche par une loi de même espérance et de même écart-type, cela justifie les paramètres de la loi normale suivie par Z.
2. Z suit la loi $\mathcal{N}(20; 0,43)$, donc $T = (Z - 20)/0,43$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient alors :
$$\begin{aligned} p(Z \leqslant 15,5) &= p\left(\frac{Z-20}{4,43} \leqslant \frac{15,5-20}{4,43}\right) \\ &= p\,(Z \leqslant -1,016) \\ &= 1 - \Pi\,(1,016) = 1 - 0,846\,1 \quad \text{soit} \quad \boxed{p(Z \leqslant 15,5) = 0,153\,9}. \end{aligned}$$

D

1. *Règle de décision* : on prlève avec remise un échantillon aléatoire de 100 rondelles dans la livraison. On mesure le diamètre de chacune de ces rondelles et on note $\overline{x}$ la moyenne de ces diamètres. Si cette moyenne vérifie $89,967 \leqslant \overline{x} \leqslant 90,033$, alors on accepte, au seuil de risque de 5% l'hypothèse H_0 selon laquelle la livraison est conforme ($\mu = 90$), sinon on refuse cette hypothèse.
2. Avec $\overline{x} = 90,02$, on $\boxed{\text{accepte, au risque de 5\%, l'hypothèse que la livraison soit conforme}}$ en raison de la règle de décision ci-dessus.