BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Nombres complexes

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2008/2009

Table des matières

Nombres complexes

Nombres complexes : exercices

Nombres complexes

1. Les différentes écritures

1.1 - Forme algébrique d'un nombre complexe

On désigne par i le nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$, et on appelle *nombre complexe* tout nombre z ayant une écriture du type

$$\boxed{z = a + ib}$$

où a et b sont des nombres réels. Cette écriture est appelée *forme algébrique*, ou encore *forme cartésienne*, du nombre complexe z, et les nombres a et b sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du nombre complexe z. On note :

$$\boxed{a = \Re\mathrm{e}(z)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b = \Im\mathrm{m}(z)}$$

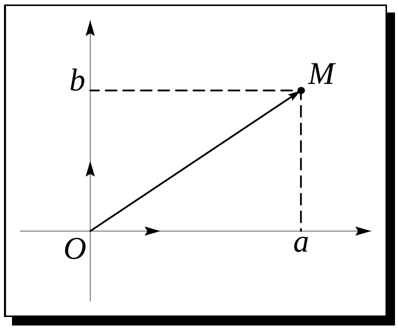
On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (on note $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux si et seulement si

$$\boxed{a = a' \qquad \text{et} \qquad b = b'.}$$

1.2 - Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b).



Ce point $M(a, b)$ est appelé *image* du nombre complexe z, et z est appelé *affixe* du point M. De même, Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nommé *vecteur image* du nombre complexe z, et z est appelé *affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$.

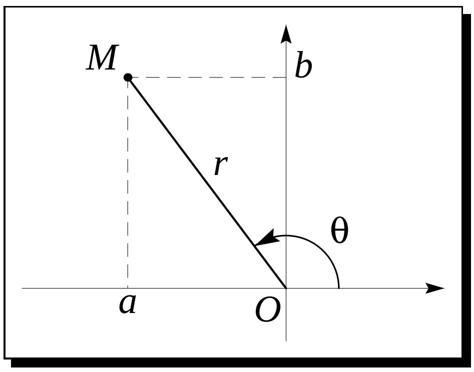
L'axe des abscisses $(O, \vec{u})$ est dit *axe réel*; l'axe des ordonnées $(O, \vec{v})$ est dit *axe des imaginaires*.

Remarques :

- Le point O est l'image du nombre 0.
- Un nombre z réel a pour image un point de l'axe $(O, \vec{u})$
- Un nombre z imaginaire pur (c'est à dire de la forme $z = ib$ avec b réel) a pour image un point de l'axe $(O, \vec{v})$
- Les nombres z et $-z$ ont pour images deux points M et M' symétriques par rapport à O.

1.3 - Forme trigonométrique, forme exponentielle

Soit le nombre complexe $z = a + ib$ et son point image M dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M, s'il est différent de l'origine O, est entièrement déterminé par les données de la distance r et de l'angle θ, où



$$r = OM \qquad \text{et} \qquad \theta = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}).$$

Ce qui nous donne une autre écriture pour le nombre complexe z. On notera

$$\boxed{z = [r, \theta]} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{z = re^{i\theta}}$$

qui sont respectivement appelées *forme trigonométrique* et *forme exponentielle* du nombre complexe z.

On appelle *module* de z, et on note $|z|$, le nombre $|z| = r$. On appelle *argument* de z, et on note $\mathrm{Arg}(z)$, toute mesure de l'angle θ. L'argument d'un nombre complexe n'est donc défini qu'à $2k\pi$ près. On en donne généralement la *détermination principale* qui est la mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

En conséquence, les nombres $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ sont égaux si et seulement si

$$\boxed{r = r'} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta = \theta' + 2k\pi}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour passer d'une écriture à une autre, on utilise les résultats suivants : si $z = a + ib$, on a

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

et en considérant les projections orthogonales du point M sur les axes de coordonnées, on obtient les relations

$$a = r\cos\theta, \qquad \text{et} \qquad b = r\sin\theta.$$

On peut alors déterminer θ en utilisant le fait que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{r}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{b}{r}}$$

Réciproquement, si on a la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on détermine la forme algébrique avec la relation :

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + ib}.$$

Remarque :

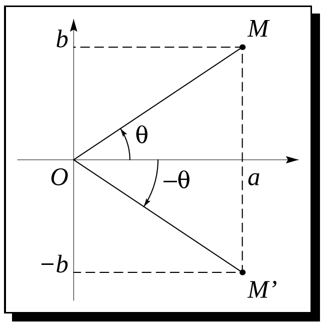
On a donc en particulier $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

2. Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

2.1 - Conjugaison, nombre complexe conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z, et on note $\overline{z}$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib.$$



Si deux nombres complexes z et z' sont conjugués, alors leurs points images respectifs M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Si la forme trigonométrique de z est $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\boxed{\overline{z} = [r, -\theta] = re^{-i\theta}}$$

2.2 - Opérations sous forme algébrique

2.2.1 - Addition et multiplication

Les calculs s'effectuent comme dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il suffit de remplacer i^2 par -1. Il en résulte en particulier que les identités remarquables restent valables pour les nombres complexes. On a ainsi, si A et B sont deux complexes quelconques :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$
$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

Et on a en plus l'égalité

$$A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB)$$

2.2.2 - Inverse et quotient de deux nombres complexes

Soit $z = a + ib$ avec $z \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Le quotient de deux nombres est défini par $z/z' = z \times 1/z'$.

2.3 - Opérations sous forme trigonométrique

On ne peut utiliser la forme trigonométrique pour additionner ou soustraire deux nombres complexes. Par contre, il est très aisé de multiplier, de diviser, ou d'élever à une puissance entière en utilisant cette écriture.

2.3.1 - Produit, produits itérés

Soit n un nombre entier positif ou négatif. On pose $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. On vérifie alors facilement (avec le formulaire de trigonométrie) les relations

$$\boxed{z \times z' = [r, \theta] \times [r'\theta'] = [r \times r', \theta + \theta']} \quad \text{et} \quad \boxed{z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta]}.$$

2.3.2 - Inverse et quotient

On pose $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. On vérifie alors facilement (avec le formulaire de trigonométrie) les relations

$$\boxed{\tfrac{1}{z} = \tfrac{1}{[r,\theta]} = \left[\tfrac{1}{r}, -\theta\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{\tfrac{z}{z'} = \tfrac{[r,\theta]}{[r'\theta']} = \left[\tfrac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]}$$

lorsque $z' \neq 0$.

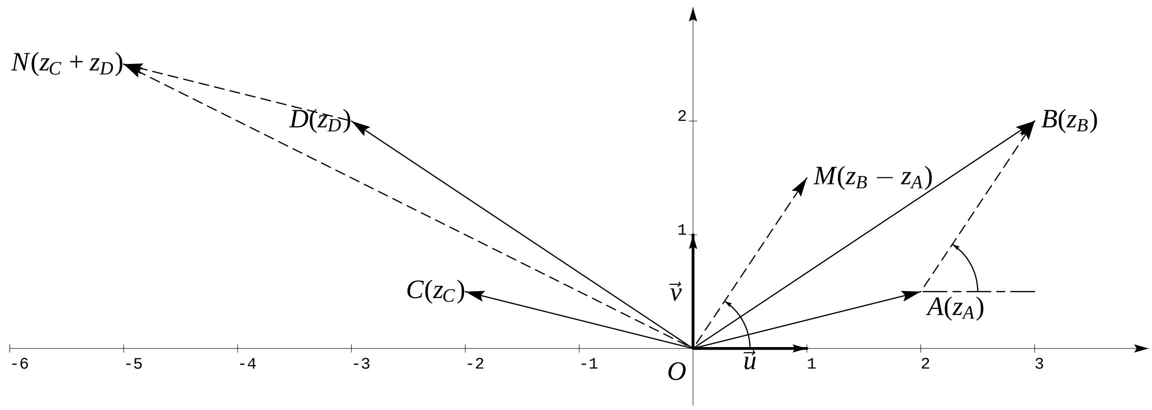
2.3.3 - Avec la notation exponentielle

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = re^{i\theta'}$. Les règles de calcul précédentes s'écrivent alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}, \quad \boxed{zz' = rr'\, e^{i(\theta+\theta')}} \quad \boxed{z^n = r^n e^{in\theta}}, \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

2.4 - Interprétations géométriques

2.4.1 - Addition, soustraction de deux complexes



Soit z_C et z_D deux nombres complexes de points images respectifs C et D. Alors le nombre $z_N = z_C + z_D$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Soit z_A et z_B deux nombres complexes de points images respectifs A et B. Alors le nombre $z_M = z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a donc en particulier,

$$\boxed{AB = |z_B - z_A|} \quad \text{et} \quad \boxed{(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \operatorname{Arg}(z_B - z_A)}$$

2.4.2 - Multiplication d'un complexe par un réel

La multiplication d'un complexe par un nombre réel correspond à la multiplication des vecteurs par un nombre réel. Plus précisément : si a un nombre complexe de vecteur image $\overrightarrow{OA}$ et α un nombre réel quelconque, alors αa est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OA}$.

3. Quelques propriétés de la conjugaison et des nombres conjugués

Soit z et z' deux nombres complexes. On vérifie immédiatement les relations

$$\boxed{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}}$$

On a en outre, si $z = a + ib$ avec a et b réels,

$$\boxed{z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2ib \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

On en déduit les parties réelles et imaginaires du nombre z :

$$\Re\mathrm{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{et} \qquad \Im\mathrm{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

4. Quelques propriétés sur les modules

Comme on l'a vu dans le paragraphe concernant les opérations sous forme trigonométrique, le module est compatible avec la multiplication et la division. Autrement dit, si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$\boxed{|z \times z'| = |z| \times |z'|} \qquad \boxed{|z^n| = |z|^n} \qquad \boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$$

Le module n'est pas compatible avec l'addition. On a néanmoins une majoration du module d'une somme :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Cette relation est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

5. Quelques propriétés sur les arguments

Comme pour les module, on a des relations simples concernant les arguments dans le cas du produit ou du quotient de deux nombres complexes : si z et z' sont deux nombres complexes, et si n est un entier relatif, on a

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z \times z') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \pmod{2\pi}} \qquad \boxed{\mathrm{Arg}(z^n) = n \times \mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}}$$

$$\boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') \pmod{2\pi}}$$

De plus, si z_A, z_B et z_C sont respectivement les affixes des points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors on a

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z_B - z_A) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})}$$

6. Équations du second degré à coefficients réels

On considère l'équation polynômiale d'inconnue complexe z :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$. Posons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ (Δ est appelé *discriminant* du polynôme $az^2 + bz + c$). Alors

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

7. Formules de Moivre et d'Euler

- Soit $z = e^{i\theta}$. Le nombre z^n (pour $n \in \mathbb{N}$) a pour module 1 et pour argument $n\theta$. On en déduit la *formule de Moivre*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

- De plus, des relations

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

on déduit les *formules d'Euler*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

Ces formules permettent la *linéarisation* des formules trigonométriques (c'est à dire la transformation d'un produit de fonctions trigo en somme de fonctions trigo). Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \frac{1}{2^3}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos\theta) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}
\end{aligned}$$

La linéarisation est souvent employée pour déterminer une primitive d'un produit de fonctions trigonométriques.

8. Calcul de racines carrées dans $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes possède une propriété remarquable : toute équation polynômiale de degré n y possède exactement n racines (en comptant les ordres de multiplicité). En particulier, si a est un nombre complexe quelconque, l'équation

$$Z^2 - a = 0$$

possède deux solutions complexes z_1 et z_2. On aura donc $z_1^2 = z_2^2 = a$, et z_1 et z_2 seront appelées les *racines carrées* du nombre complexe a.

Résolution pratique

Par exemple, cherchons les deux racines carrées de $3 + 4i$. On pose $z = a + bi$ l'inconnue solution de l'équation $Z^2 = 3 + 4i$. Il vient :

$$(a + ib)^2 = 3 + 4i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

D'autre part, comme $|z|^2 = |3 + 4i|$, on a également $a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Finalement, nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 2 \\ 2ab = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

En remarquant que a et b sont de même signe puisque le produit ab est positif, on en déduit que les deux racines carrées de $3 + 4i$ sont $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = -2 - i$.

9. Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

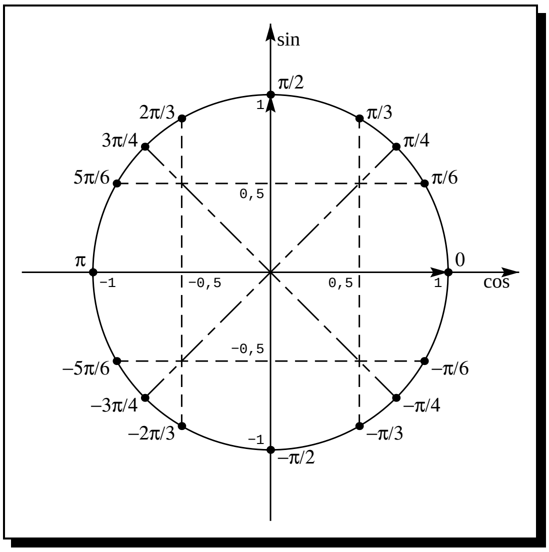
Soit l'équation

$$(E) \qquad aZ^2 + bZ + c = 0, \qquad \text{où} \qquad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

On appelle *discriminant* de cette équation le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ. Alors l'équation (E) admet les deux racines

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2a}(-b - \delta)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_2 = \frac{1}{2a}(-b + \delta)}.$$

Nombres complexes : exercices



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

1. Calculs sous forme algébrique

Exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^2 - 5z + 6i.$$

Calculer $P(0)$, $P(i)$, $P(2i)$, $P(i+1)$.

Exercice 2 : Calcul sous forme algébrique

Déterminer les parties réelles et imaginaires de

$$z_1 = \frac{1}{2+i} \qquad z_2 = \frac{1-i}{1+i} \qquad z_3 = \frac{2-3i}{4-5i} \qquad \text{et} \qquad z_4 = \frac{2-2i}{3+3i}.$$

Exercice 3 : Calculs sous forme algébrique

Mettre sous la forme algébrique $a + bi$ les nombres complexes suivants :

$$a)\ -i + \frac{1}{2i}, \qquad b)\ \frac{1-3i}{2+i}, \qquad c)\ \left(\frac{1-3i}{2+i}\right)^2$$

Exercice 4 : Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}(\underline{Z_2} + R) + \underline{Z_2}R},$$

avec $R = 900$, $\underline{Z_1} = 1\,100j$, $\underline{Z_2} = -600j$.

Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

Exercice 5 : Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

avec $\underline{Z}_1 = 1 + 2j$, $\underline{Z}_2 = -1 + 3j$ et $\underline{Z}_3 = 4 + 5j$.
Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a + bj$.

2. Forme exponentielle

Exercice 6 : Forme algébrique à partir de la forme exponentielle

Déterminer la forme algébrique du complexe $z_A = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

Exercice 7 : Forme algébrique à partir de la forme exponentielle

Déterminer la forme algébrique du complexe $z_B = -\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

Exercice 8 : Forme trigonométrique ou exponentielle

Déterminer les formes trigonométriques des nombres

$$z_1 = 3i, \qquad z_2 = -5, \qquad z_3 = 2 - 2i \qquad z_4 = 1 + i\sqrt{3}$$

Exercice 9 : Calcul sous forme trigonométrique

- Déterminer les formes trigonométrique des nombres 1, i, -2 et $-i$.
- Déterminer la forme algébrique de $(1+i)^{2008}$

Exercice 10 : De l'utilité de la forme trigonométrique : racines nièmes de l'unité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Les quatres questions ci-dessous sont indépendantes, on fera un dessin distinct par question.

1. Soit M_1 le point d'affixe $z = -1$ et M_2 le point d'affixe z^2.
   a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles de z et z^2.
   b) Calculer les coordonnées des points M_1 et M_2.
   c) Représenter M_1 et M_2 dans le plan complexe.
2. Soit M_1 le point d'affixe $z = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, M_2 le point d'affixe z^2, et M_3 le point d'affixe z^3.
   a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles de z, z^2 et z^3.
   b) Calculer les coordonnées des points M_1, M_2 et M_3.
   c) Représenter M_1, M_2 et M_3 dans le plan complexe.
3. Soit M_1 le point d'affixe $z = i$, M_2 le point d'affixe z^2, M_3 le point d'affixe z^3, et M_4 le point d'affixe z^4.
   a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles de z, z^2, z^3 et z^4.
   b) Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M_4.
   c) Représenter M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.
4. Soit M_1 le point d'affixe $z = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$, et M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 les points d'affixes respectives z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8.
   a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles de z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8.
   b) Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8.
   c) Représenter M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 dans le plan complexe.

Exercice 11 : Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 2 - 2i, \qquad A = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1. *a*) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.

b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.

2. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

3. Équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 12 : Équations dans $\mathbb{C}$

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = [(1+i)z - 1](iz+2)$.

1. Déterminer la forme développée de f.

2. *a*) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z - 1 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz + 2 = 0$.

c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

3. Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a

$$f(z) = (i-1)(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(z - 2i).$$

Exercice 13 : Équations du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

a) $z^2 = -16$ *b*) $z^2 = -3$ *c*) $z^2 = 5$

Exercice 14 : Équations du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

a) $-z^2 + 3z + 1 = 0$ *b*) $z^2 - 2z + 2 = 0$

Exercice 15 : Équation du second degré dans $\mathbb{C}$ (*Bac sti gm, juin 1999*)

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = -\sqrt{3} + i$.

Calculer le module de z_1 et un argument de z_1.

2. *a*) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

b) Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau).

On considère les nombres complexes

$$z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

et on note M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan.

Exercice 16 : Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 = 3 - 4i.$$

Exercice 17 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$
2. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 18 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Calculer $(3 - 2i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + z - 1 + 3i = 0.$$

Exercice 19 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Calculer $(5 - 3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + (5 - i)z + 2 + 5i = 0.$$

Exercice 20 : Équation du second degré dans $\mathbb{C}[X]$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i = 0.$$

Exercice 21 : Équation dans $\mathbb{C}[X]$ et triangle

On donne le polynôme de la variable complexe z :
$$P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (16 + 15i)z + 2 - 36i$$
où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. *a*) Calculer $P(2i)$.
   b) En déduire une factorisation de $P(z)$ en admettant que, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, si un polynôme s'annule pour $z = a$, alors il peut s'écrire sous la forme $(z - a)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. *a*) Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives
$$z_1 = 2i, \qquad z_2 = 3 - 2i, \qquad \text{et} \qquad z_3 = 4 + 3i.$$
   b) Calculer la valeur exacte de la longueur de chaque côté du triangle ABC.

Exercice 22 : Équations et géométrie

1. On considère le polynôme P défini, pour $z \in \mathbb{C}$, par
$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7.$$

a) Calculer $P(-1)$. En déduire une factorisation de $P(z)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm ou 2 grands carreaux). On note A, B et C les points d'affixes respectives $-1, 2 - i\sqrt{3}$ et $2 + i\sqrt{3}$.

a) Placer ces trois points.
b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 23 : Équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 + i.$$

Exercice 24 : Système d'équations dans $\mathbb{C}$

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

4. Linéarisation

Exercice 25 : Linéarisation

Utiliser les formules d'Euler pour transformer en somme l'expression suivante :

$$f(x) = \sin(2x)\sin(3x)$$

Exercice 26 : Linéarisation

Linéariser l'expression $\sin^3(2x)$.

Exercice 27 : Équation trigonométrique et linéarisation

Le but de cet exercice est la résolution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l"équation

$$2\sin x - \sin 3x = 0.$$

1. Soit x un nombre réel :

a) Développer $(e^{ix} - e^{-ix})^3$ et montrer que

$$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}).$$

b) Transformer l'égalité précédente à l'aide des formules d'Euler, et en déduire que :

$$4\sin^3 x - \sin x = 2\sin x - \sin 3x.$$

2. Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

$$a)\ \sin x = 0, \qquad b)\ \sin x = \frac{1}{2}, \qquad c)\ \sin x = -\frac{1}{2}.$$

3. En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l'équation

$$2\sin x - \sin 3x = 0.$$