

1. Convergence et divergence des séries

Définitions

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

La série de terme général (u_n) est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On dit que la série de terme général (u_n) converge lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ;

cette limite est alors notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, et appelée somme de la série.

Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général (u_n) diverge, et on renonce à tout calcul sur $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Ceci recouvre aussi bien le cas d'une limite infinie que celui d'une limite inexistante.

Pour abréger, on pourra dire que la série $\sum u_n$ converge ou que la série $\sum u_n$ diverge.

Divergence grossière

Si la suite $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

La réciproque est fautive, ainsi $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ tend vers 0, mais $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$ diverge.

Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge — on dit dans ce cas qu'il y a divergence grossière.

Règles de calcul

Elles sont la conséquence de celles concernant les suites, principalement

$$\sum_{n \geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n = \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n),$$

la deuxième égalité (additivité) ne doit pas être utilisée pour scinder une série en somme de deux séries divergentes.

Séries géométriques

- Si $|q| < 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge (vers $\frac{1}{1-q}$).
- Si $|q| \geq 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge.

J'attire votre attention sur ces résultats souvent méconnus et plus subtils qu'il ne le paraissent, surtout dans le cas où $|q| = 1$.

Comparaison avec une intégrale impropre

Propriété

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$ (donc positive sur $\mathbb{R}_+$) ;

Alors la série $\sum f(n)$ a la même nature que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} f(t) dt$.

Ne pas oublier l'hypothèse de décroissance de f .

Conséquence : Les séries de Riemann

Par application du résultat précédent à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$, on obtient que

- Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers une limite "inconnue".

2. Séries à termes positifs

Remarques générales

- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$, et S_n la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$;
Alors S_n est croissante, donc admet une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$: cette limite est sa borne supérieure ;
Donc $\sum u_n$ converge ssi les sommes partielles sont majorées.
- Les résultats concernant les séries à termes positifs s'étendent aux séries à termes de signe constant, et même aux séries $\sum u_n$, où le signe de u_n est constant pour $n \geq n_0$. (n_0 fixé)

Comparaison de deux séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs ; Alors,

(C) Si $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$, (n_0 fixé dans $\mathbb{N}$), et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;

(D) Si $u_n \ll v_n$, et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;

(E) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature ;

commentaires

(C) et (D) servent à montrer la convergence (ou, par contraposée, la divergence) déjà supposée d'une série ;

(E) permet de trouver la nature d'une série, même sans opinion *a priori*.

Dans (C), $u_n \geq 0 \Rightarrow v_n \geq 0$; Dans (E), $u_n \geq 0 \Leftrightarrow v_n \geq 0$;

Dans (D), la relation de domination $\ll$ ne contient aucun renseignement de signe, car $u_n \ll v_n \Leftrightarrow |u_n| \ll |v_n|$.

3. Séries absolument convergentes

On dit que la série $\sum u_n$, à termes complexes est absolument convergente, lorsque la série $\sum |u_n|$ à termes réels positifs est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente, c'est-à-dire que

$$\sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n \geq 0} u_n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |u_n|.$$

La réciproque est faussée, c'est-à-dire que de nombreuses séries convergent sans converger absolument.

Critère de d'Alembert pour la convergence d'une série numérique

propriété

Soit (u_n) une suite à termes réels ou complexes ; On suppose que, pour $n > n_0$ fixé, $u_n \neq 0$. Alors :

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ avec $\ell < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ avec $\ell > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

commentaires

- La preuve s'obtient assez rapidement par récurrence puis comparaison avec une série géométrique. Il est utile de la connaître.
- Ce critère, indispensable dans certains cas, est inopérant lorsque :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \text{ n'a pas de limite} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \text{ tend vers } 1 \text{ (cas douteux).}$$

4. Séries alternées

définition et théorème

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et de limite nulle ;

Alors, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

De plus, soit S la somme de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$, et R_n son reste d'ordre n : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$
Alors R_n a le signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

remarques

Ce théorème est très pratique pour démontrer la convergence de certaines séries changeant "souvent" de signe, mais surtout pour obtenir une approximation bien contrôlée de certains réels exprimés comme limite d'une série alternée.

Le revers de la médaille est l'hypothèse de décroissance de u_n , dont la vérification parfois difficile est souvent omise. Il est très mal vu d'oublier cette hypothèse.

Séries entières

1 définition

Soit a_n une suite à valeurs réelles ou complexes, on appelle série entière l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe la somme de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, lorsque cette série converge.

remarques

- La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge au moins pour $z = 0$.
- On pose $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, même $z = 0$.
- Les polynômes sont des cas particuliers de série entière (avec $a_n = 0$ pour $n > p$)

2 Disque et rayon de convergence

Soit r un réel positif, on note D_r le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\overline{D}_r$ le disque fermé $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, avec la convention : $D_0 = \emptyset$, $\overline{D}_0 = \{0\}$, $D_{+\infty} = \overline{D}_{+\infty} = \mathbb{C}$

2.1 Lemme d'Abel

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière : si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $|z_1| < |z_0|$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ converge absolument ;
a fortiori, si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge et si $|z_1| < |z_0|$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ converge absolument.

2.2 Définition du rayon et du disque de convergence

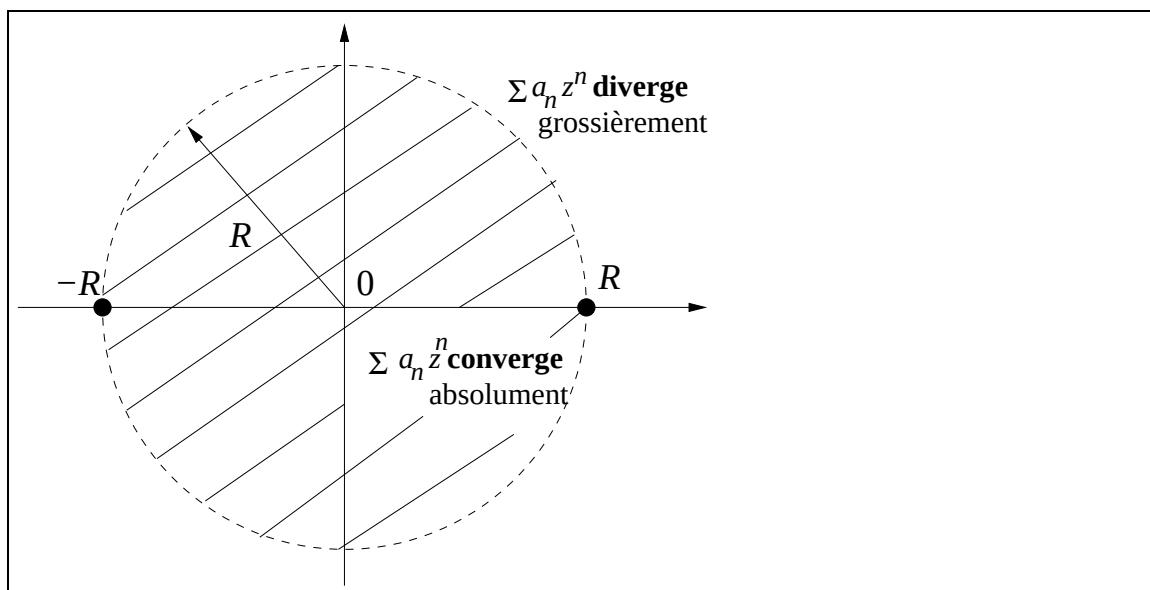
Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, et $\mathcal{C}$ son domaine de convergence, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge ; il existe un unique élément R de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $D_R \subset \mathcal{C} \subset \overline{D}_R$.

R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$;

Si $R = 0$, alors $\sum a_n z^n$ n'est défini qu'en 0 ;

Si $R = \infty$, alors $\sum a_n z^n$ est défini sur $\mathbb{C}$ tout entier ;

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\sum a_n z^n$ est défini sur $\mathcal{D}_R$, et éventuellement en quelques points du cercle $\{z, |z| = R\}$.



2.3 Calcul pratique du rayon de convergence à l'aide du critère de d'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; On suppose que $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \ell$.

Attention, dans les mêmes conditions, le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^{2n}$ et $\sum a_n z^{2n+1}$ est $R = \sqrt{\ell}$ (avec $\sqrt{\infty} = \infty$ par convention).

Une erreur fréquente est d'écrire « Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, alors $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ » : l'existence du rayon de convergence ne garantit pas celle de la limite.

2.4 Calcul pratique du rayon de convergence à l'aide du lemme d'Abel

Lorsque la méthode ci-dessus échoue, il faut remonter à la définition du rayon de convergence, et, en particulier, utiliser les implications suivantes, valables pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:

- ◇ $\sum a_n z_0^n$ converge $\Rightarrow R \geq |z_0|$
- ◇ $a_n z_0^n$ ne tend pas vers 0 $\Rightarrow R \leq |z_0|$

3 Propriétés de régularité de la somme $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, de rayon de convergence R , et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

- f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et $f^{(p)}(x) = \sum_{n \geq p} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) a_n x^{n-p}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $|x| < R$.
- $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ pour $x \in] -R, R[$.
- si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, alors f est continue sur $[0, R]$.

Remarque : En conséquence, les coefficients a_n sont uniques et valent $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Il en résulte que le développement en série entière d'une fonction paire [resp. impaire] n'a que des coefficients pairs [resp. impairs].

Résultat admis (théorème «taubérien»)

Si le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, et si de plus la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $x = R$, alors la somme $f(x)$ est continue sur $[0, R]$.

Autrement dit : Si la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge, elle est égale à la limite quand x tend vers R ($x < R$) de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4 Développements en série entière à connaître

$$\begin{array}{llll}
 \frac{1}{1+x} & = & \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n & = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots & R = 1 \\
 \ln(1+x) & = & \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots & R = 1 \\
 e^x & = & \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} & = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots & R = \infty \\
 \cos x & = & \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots & R = \infty \\
 \sin x & = & \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots & R = \infty \\
 \operatorname{ch} x & = & \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots & R = \infty \\
 \operatorname{sh} x & = & \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots & R = \infty \\
 (1+x)^\alpha & = & \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots & R = 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}; R = \infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}
 \end{array}$$

Certains de ces développements ($\frac{1}{1+x}$ et surtout e^x) s'étendent à des valeurs complexes de x — on rappelle que $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Il est alors possible d'étendre les définitions de $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ et $\sin x$ à des valeurs complexes quelconques de x , ce qui permet d'«unifier» les formules de trigonométrie et d'intégration, mais ceci est hors programme.

5 Développements en série entière en un point quelconque x_0

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, et si la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement en série entière $\sum_{n \geq 0} a_n h^n$, alors on dit que f admet comme développement en série entière en x_0 : $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$.
- Si $x_0 = +\infty$, et si la fonction $y \mapsto f(\frac{1}{y})$ admet un développement en série entière $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$, alors on dit que f admet comme développement en série entière en $+\infty$: $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{x^n}$.