Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Première partie : Contraposée d'une propriété

On a déjà rencontré, dans certains cas, la contraposée d'une propriété (exemple : dans un triangle de plus grand côté $[AB]$, si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle, qui est la contraposée du théorème de Pythagore). La contraposée d'une propriété 1 est une autre propriété 2 dont les conditions sont la négation des conclusions de la propriété 1 et les conclusions sont la négation des conditions de la propriété 1.

Exemple:
Propriété 1 :
Si $\underbrace{\text{un nombre est divisible par dix}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il se termine par 0}}_{\text{conclusion}}$.
Propriété 2 :
Si $\underbrace{\text{un nombre ne se termine pas par 0}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il n'est pas divisible par dix}}_{\text{conclusion}}$.

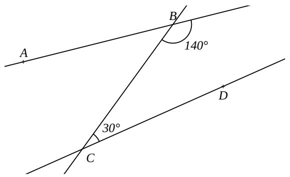
Remarque:
1. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
2. La négation de **et** est **ou** et inversement.

Attention!!! : Ne pas confondre contraposée et réciproque.

Donner les réciproques et contraposées des propriétés suivantes, puis dire si elles sont vraies :
1. Si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont sécantes.
2. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
3. Si j'ai deux chemises alors j'ai au moins une chemise.

Deuxième partie : Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une méthode pour démontrer.



Principe :
On veut montrer que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1. On suppose quelque chose de faux dans l'énoncé.	Dans notre exemple, on suppose que (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Au cours de la démonstration, on constate une contradiction.	(AB) et (CD) sont parallèles, donc les angles alternes internes qu'elles forment avec la droite (BC) ont même mesure, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. De plus $\widehat{ABC} = 180 - 140 = 40^{\circ}$. $\widehat{BCD} = 30^{\circ}$. Donc $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$.
3. S'il y a une contradiction, cela veut dire que l'énoncé est faux (ou qu'on a fait une erreur, mais ce n'est pas le sujet...).	On constate que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, ce qui est contradictoire, donc la supposition est fausse donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Troisième partie : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ semble avoir été découverte par les pythagoriciens (disciples de Pythagore). La démonstration proposée est très voisine de celle d'Euclide dans son ouvrage intitulé *Éléments*.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fraction **irréductible** $\dfrac{p}{q}$ telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers.

1. Expliquer pourquoi alors $p^2 = 2q^2$.
2. Montrer que si p est pair alors p^2 est pair.
3. Donner la contraposée de cette propriété.
4. Montrer que si p est impair alors p^2 est impair.
5. Donner la contraposée de cette propriété.
6. Le nombre $2q^2$ est-il pair ou impair ? Justifier que p est pair.
7. Posons $p = 2p'$.
   Expliquer pourquoi : $q^2 = 2p'^2$. En déduire que q est pair.
8. On sait que p est pair et que $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. En déduire que q est impair.
9. Où est la contradiction ?
10. Conclure.