Nombre d'or

0. Le nombre d'or

Faire des recherches sur ce nombre (succinctes et abordables).

1. L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (E)

1. Montrer que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de (E).
2. Calculer une valeur approchée de ϕ à 10^{-3} près.

2. Suite de Fibonacci

Première partie

La suite de nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ est une suite de nombres bien connue. C'est une suite de nombres de 1^er^ terme 1, de 2^e^ terme 2, etc...
Il existe bien d'autres suites de nombres, par exemple :

1. La suite de nombres $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
   Déterminer les 6^e^ et 7^e^ termes.
2. La suite de nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
   Déterminer les 6^e^ et 7^e^ termes.
3. La suite de nombres $1, 4, 7, 10, 13, \dots$
   Déterminer les 6^e^ et 7^e^ termes.

Deuxième partie

Parmi toutes ces suites, il y en a une un peu plus intéressante : la suite de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

1. On calcule un terme en additionnant les deux termes précédents.
   Déterminer les 10^e^ et 11^e^ termes.

2. Calcul des rapports de termes consécutifs (le plus grand au numérateur) :
   $\frac{1}{1} = \dots \quad \frac{2}{1} = \dots \quad \frac{3}{2} = \dots \quad \frac{5}{3} = \dots \quad \frac{8}{5} = \dots$
   Calculer ces rapports (on donnera une valeur approchée à 10^{-3} si nécessaire), puis calculer les rapports suivants (en s'arrêtant au rapport de numérateur 89).

3. Que remarque-t-on ?

3. Fraction continue

$$A = 1 + \cfrac{1}{1+1} \qquad B = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}$$

$$C = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}} \qquad D = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

$$E = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}} \qquad F = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}}}$$

1. Calculer et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles les nombres A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = 1 + \frac{1}{A}$, $C = 1 + \frac{1}{B}$...) .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de A, B, C, D, E et F.
3. Quelle remarque peut-on faire ?

4. Racines imbriquées

$$A = \sqrt{1+\sqrt{1}} \qquad B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

$$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \qquad D = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$$

$$E = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} \qquad F = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}$$

1. Calculer A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = \sqrt{1+A}$, $C = \sqrt{1+B}$...), on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. Quelle remarque peut-on faire ?

5. Pentagone régulier

Première partie

1. Tracer un cercle de centre O, de rayon 10 cm sur une feuille blanche (de dessin).
   Tracer un rayon $[OA]$.
   Placer le point B sur le cercle tel que $\widehat{AOB} = 72^\circ$.
   De même, placer le point $C (\neq A)$ sur le cercle tel que $\widehat{BOC} = 72^\circ$.
   En utilisant le même principe, placer D et E.
   On obtient ainsi un pentagone régulier $ABCDE$ (5 côtés et 5 angles de même mesure).
2. Mesurer AC, puis CD. Calculer $\dfrac{AC}{CD}$ (à 10^{-3} près).
   Que remarque-t-on ?
   On supposera par la suite que $\dfrac{AC}{CD} = \phi \quad \left(= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ pour rappel} \right)$.

Deuxième partie

1. Calculer $\widehat{COA}$.
2. Calculer $\widehat{CAO}$. En déduire $\widehat{ACO}$.
3. Calculer $\widehat{OCD}$.
4. Soit A' le milieu de $[CD]$, montrer que le triangle $OA'C$ est rectangle en A'.
5. Calculer $\widehat{COA'}$, puis $\widehat{A'OA}$, en déduire que A, O et A' sont alignés.
6. Calculer $\widehat{ACA'}$.
7. En remarquant que $\dfrac{DC}{AC} = 2 \times \dfrac{A'C}{AC}$, calculer la valeur exacte de $\dfrac{A'C}{AC}$ (penser que $\dfrac{DC}{AC}$ est l'inverse de $\dfrac{AC}{DC}$).
8. En déduire une valeur exacte de $\cos 72^\circ$.

6. Nombre d'or dans la vie de tous les jours

Faire des recherches sur le théâtre d'Épidaure, sur les tournesols (en rapport avec la suite de Fibonacci).
Trouver d'autres éléments en relation avec ce nombre.